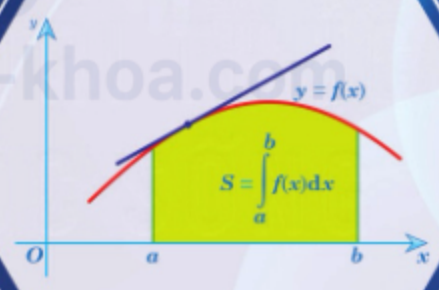
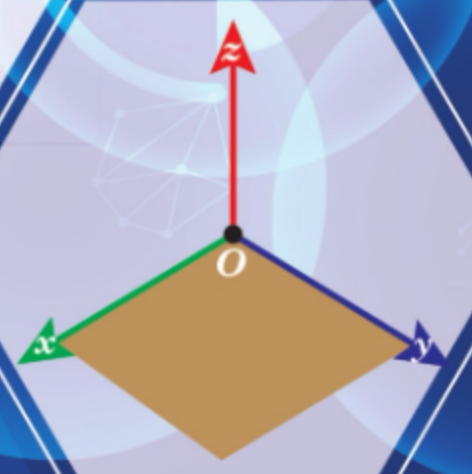
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 12

TẬP HAI

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN

12

TẬP HAI

sach-giao-khoa.com

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

   Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

   Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

   Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

   Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

   Hình thành kiến thức: Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.

   Ví dụ: Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.

   Luyện tập: Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.

   Vận dụng: Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

   Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

   Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

   Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy, cô giáo sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

MỤC LỤC

CHƯƠNG IV. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Bài 11. Nguyên hàm	4
Bài 12. Tích phân	12
Bài 13. Ứng dụng hình học của tích phân	19
Bài tập cuối chương IV	27

CHƯƠNG V. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 14. Phương trình mặt phẳng	29
Bài 15. Phương trình đường thẳng trong không gian	41
Bài 16. Công thức tính góc trong không gian	50
Bài 17. Phương trình mặt cầu	54
Bài tập cuối chương V	61

CHƯƠNG VI. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 18. Xác suất có điều kiện	64
Bài 19. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes	72
Bài tập cuối chương VI	79

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

Tính nguyên hàm và tích phân với phần mềm GeoGebra. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang	81
Vẽ đồ hoạ 3D với phần mềm GeoGebra	85

Bài tập ôn tập cuối năm	90
Bảng tra cứu từ ngữ	94
Bảng giải thích thuật ngữ	95

sách-giáo-khoa.com

CHƯƠNG IV
NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN



Chương này trình bày khái niệm, tính chất cơ bản của nguyên hàm và tích phân cũng như ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và thể tích vật thể.

Bài 11 NGUYÊN HÀM

THUẬT NGỮ

- Nguyên hàm
- Họ các nguyên hàm
- Bảng nguyên hàm

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm nguyên hàm của một hàm số.
- Giải thích một số tính chất của nguyên hàm.
- Tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp thường gặp.

Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho bởi $v(t) = 5 + 3t$ (m/s), với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét?



Hình 4.1

Ta cần tìm quãng đường $S(t)$ mà máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng $S'(t) = v(t)$. Như vậy, ta cần tìm một hàm số có đạo hàm bằng hàm số $v(t)$ đã cho. Bài toán này dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm *nguyên hàm*.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

HĐ1. Nhận biết khái niệm nguyên hàm

Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 1$ và $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$, với $x \in \mathbb{R}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $F(x)$.

b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa $F'(x)$ và $f(x)$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b).$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2;\quad G(x)=\frac{x^3}{3}+x^2.$$

Giải

Ta có: $F'(x)=x^2-2x$, $G'(x)=x^2+2x$.

Vì $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $G(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ vì với $x=1$, ta có

$$G'(1)=3\neq -1=f(1).$$

Luyện tập 1. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$?

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x;\quad G(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x.$$

HĐ2. Nhận biết họ nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)=x^3$.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $G(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (với C là hằng số) có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ không? Vì sao?

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x)+C(C\in\mathbb{R})$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K, kí hiệu bởi $\int f(x)\,dx$.

sach-giao-khoa.com

Chú ý

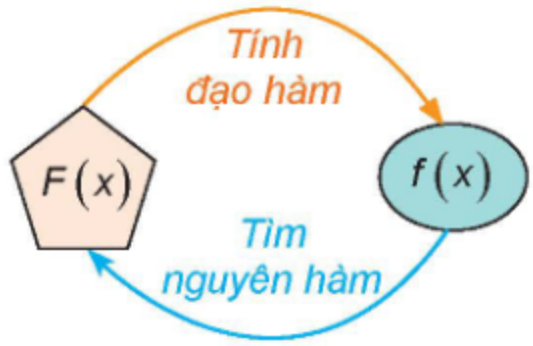
a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \text{ là hằng số.}$$

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.



Hình 4.2. Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm

Ví dụ 2. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Từ đó hãy tìm $\int x^2\mathrm{d}x$.

Giải

Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$ nên $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$.

Luyện tập 2. Tìm $\int x^3\mathrm{d}x$.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

HĐ3. Khám phá nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K, k là một hằng số khác 0. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

a) Chứng minh $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$ trên K.

b) Nêu nhận xét về $\int kf(x)\mathrm{d}x$ và $k\int f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0).$$

Ví dụ 3. Sử dụng kết quả của Ví dụ 2, hãy tìm:

a) $\int 3x^2\mathrm{d}x$; b) $\int -\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có:

a) $\int 3x^2\mathrm{d}x = 3\int x^2\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$.

b) $\int -\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int x^2\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + C = -\frac{1}{2}x^3 + C$.

Luyện tập 3. Cho hàm số $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Từ đó tìm $\int x^n \mathrm{d}x$.

b) Từ kết quả câu a, tìm $\int kx^n \mathrm{d}x$ (k là hằng số khác 0).

HĐ4. Khám phá nguyên hàm của một tổng

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K, $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên K.

a) Chứng minh $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ trên K.

b) Nêu nhận xét về $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ và $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

- $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$
- $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$

Ví dụ 4. Sử dụng kết quả của Luyện tập 3 và tính chất cơ bản của nguyên hàm, hãy tìm:

a) $\int (x^2 + x)\mathrm{d}x$; b) $\int (4x^3 - 3x^2)\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có:

a) $\int (x^2 + x)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x + \int x\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C.$

b) $\int (4x^3 - 3x^2)\mathrm{d}x = 4\int x^3\mathrm{d}x - 3\int x^2\mathrm{d}x = x^4 - x^3 + C.$

sách-giáo-khoa.com

Luyện tập 4. Tìm:

a) $\int (3x^2 + 1)\mathrm{d}x$; b) $\int (2x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 5. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Gọi $S(t)$ $(0 \le t \le 30)$ là quãng đường máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà.

Ta có $v(t) = S'(t)$. Do đó, $S(t)$ là một nguyên hàm của hàm số vận tốc $v(t)$. Sử dụng tính chất của nguyên hàm ta được

$$S(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int (5 + 3t)\mathrm{d}t = 5\int \mathrm{d}t + 3\int t\mathrm{d}t = 5t + \frac{3}{2}t^2 + C.$$

Theo giả thiết, $S(0) = 0$ nên $C = 0$ và ta được $S(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 5t$ (m).

Máy bay rời đường băng khi $t = 30$ (giây) nên $S = S(30) = \dfrac{3}{2}\cdot 30^2 + 5\cdot 30 = 1\,500$ (m).

Vậy quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi nó rời đường băng là $S = 1\,500$ m.

Vận dụng. Doanh thu bán hàng của một công ty khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Một công ty công nghệ cho biết tốc độ biến động của doanh thu khi bán một loại con chíp của hãng được cho bởi $M_R(x) = 300 - 0{,}1x$, ở đó x là số lượng chíp đã bán. Tìm doanh thu của công ty khi đã bán 1 000 con chíp.

Hướng dẫn: Vì $R'(x) = M_R(x)$ nên doanh thu $R(x)$ là một nguyên hàm của $M_R(x)$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là *hàm số luỹ thừa*.

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

– Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;

– Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

– Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Ở lớp 11, ta đã biết đạo hàm của các hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ và $y = \sqrt{x}$ là:

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ hay } \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \ (x > 0).$$

Tổng quát, người ta chứng minh được

> Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Bằng cách viết lại các hàm số sau dưới dạng hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ $(x > 0)$, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau với $x > 0$: $y = \frac{1}{x^4}$; $y = x^{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

HĐ5. Khám phá nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

a) Với $\alpha \neq -1$, tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(x > 0)$.

b) Cho hàm số $y = \ln|x|$ $(x \neq 0)$. Tính đạo hàm của hàm số này trong hai trường hợp: $x > 0$ và $x < 0$.

Từ kết quả của HĐ5, ta có

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Ví dụ 6. Tìm:

a) $\int \sqrt{x} dx \ (x > 0)$;

b) $\int \frac{1}{x^3} dx$;

c) $\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Giải

a) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

b) $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

c) $\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = \int 2x^2dx + \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = 2\int x^2dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}x^3 + 6\sqrt{x} + C.$

Luyện tập 5. Tìm:

a) $\int \frac{1}{x^4}dx;$ b) $\int x\sqrt{x}dx\ (x > 0);$ c) $\int \left(\frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x}\right)dx\ (x > 0).$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

HĐ6. Khám phá nguyên hàm của hàm số lượng giác

a) Tính đạo hàm của các hàm số sau và nêu kết quả tương ứng vào bảng dưới đây.

$F(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$F'(x)$	?	?	?	?

b) Sử dụng kết quả ở câu a, tìm nguyên hàm của các hàm số cho trong bảng dưới đây.

$f(x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int f(x)dx$	?	?	?	?

sách-giáo-khoa.com

Từ kết quả của HĐ6, ta có

- $\int \cos xdx = \sin x + C;$
- $\int \sin xdx = -\cos x + C;$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C.$

Ví dụ 7. Tìm:

a) $\int (\cos x + \sin x)dx;$ b) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx.$

Giải

a) $\int (\cos x + \sin x)dx = \int \cos xdx + \int \sin xdx = \sin x - \cos x + C.$

b) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int \cos xdx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = 2\sin x - \tan x + C.$

Luyện tập 6. Tìm:

a) $\int (3\cos x - 4\sin x)dx;$ b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx.$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ

HĐ7. Khám phá nguyên hàm của hàm số mũ

a) Tính đạo hàm của các hàm số sau và nêu kết quả tương ứng vào bảng dưới đây.

$F(x)$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}\ (0<a\neq 1)$
$F'(x)$	?	?

b) Sử dụng kết quả ở câu a, tìm nguyên hàm của các hàm số cho trong bảng dưới đây.

$f(x)$	e^x	$a^x\ (0<a\neq 1)$
$\int f(x)\,dx$	?	?

Từ kết quả của HĐ7, ta có

- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0<a\neq 1).$

Ví dụ 8. Tìm:

a) $\int 2^x\,dx;$ b) $\int \frac{1}{3^x}dx;$ c) $\int \left(2e^x - 5^x\right)dx.$

Giải

a) $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

b) $\int \frac{1}{3^x}dx = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C.$

c) $\int \left(2e^x - 5^x\right)dx = 2\int e^x dx - \int 5^x dx = 2e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + C.$

Luyện tập 7. Tìm:

a) $\int 4^x\,dx;$ b) $\int \frac{1}{e^x}dx;$ c) $\int \left(2\cdot 3^x - \frac{1}{3}\cdot 7^x\right)dx.$

Ta tổng kết lại bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp như sau:

$\int 0\,dx = C$	$\int 1dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha\neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0<a\neq 1)$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

sach-giao-khoa.com

Dựa vào bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp và tính chất cơ bản của nguyên hàm, ta có thể tìm được nguyên hàm của nhiều hàm số khác.

BÀI TẬP

4.1. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x\ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) $F(x) = e^{\sin x}$ và $f(x) = e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

4.2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;

b) $f(x) = x^3 - x$;

c) $f(x) = (2x+1)^2$;

d) $f(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^2$.

4.3. Tìm:

a) $\int \left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$;

b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2 - 3\right) dx \ (x > 0)$;

c) $\int \dfrac{(2x+1)^2}{x^2} dx$;

d) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right) dx$.

4.4. Tìm:

a) $\int \left(2\cos x - \dfrac{3}{\sin^2 x}\right) dx$;

b) $\int 4\sin^2 \dfrac{x}{2} dx$;

c) $\int \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 dx$;

d) $\int \left(x + \tan^2 x\right) dx$.

4.5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết rằng, $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính giá trị $f(4)$.

4.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x-1)^2$ và điểm M trùng với gốc toạ độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

4.7. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Sau $t = 5$ giây;

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét).

Bài 12

TÍCH PHÂN

THUẬT NGỮ

- Tích phân
- Cận tích phân
- Hàm số dưới dấu tích phân

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết định nghĩa và các tính chất của tích phân.
- Tính tích phân trong những trường hợp đơn giản.
- Vận dụng tích phân để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?



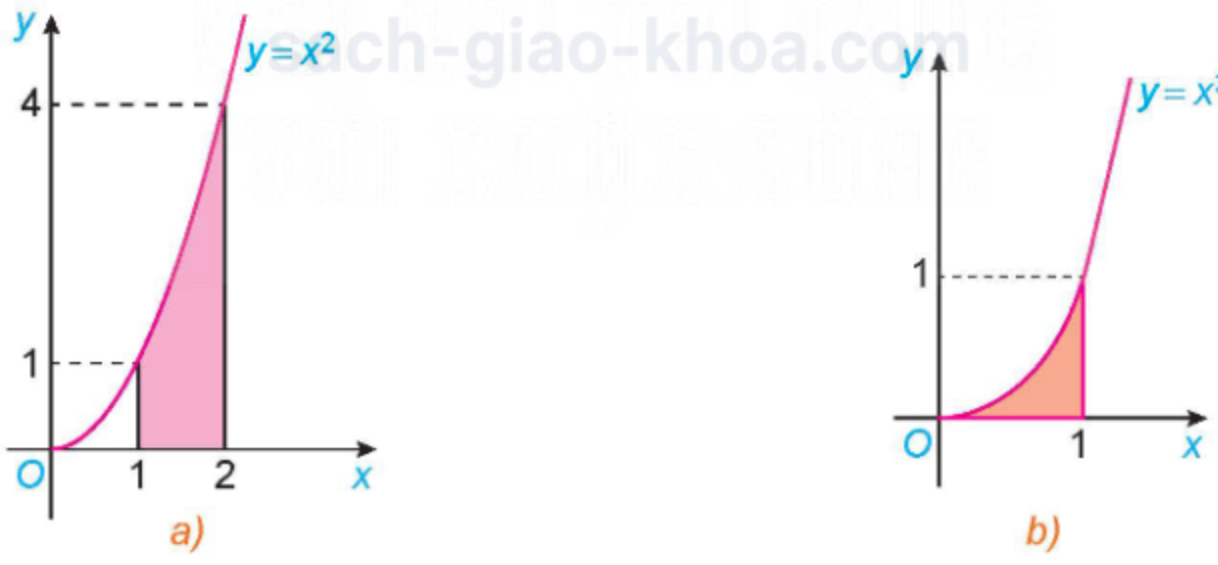
1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một *hình thang cong*.

Ví dụ 1. Những hình phẳng được tô màu dưới đây có phải là hình thang cong không?



Hình 4.3

Giải

Hình 4.3a là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Hình 4.3b là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

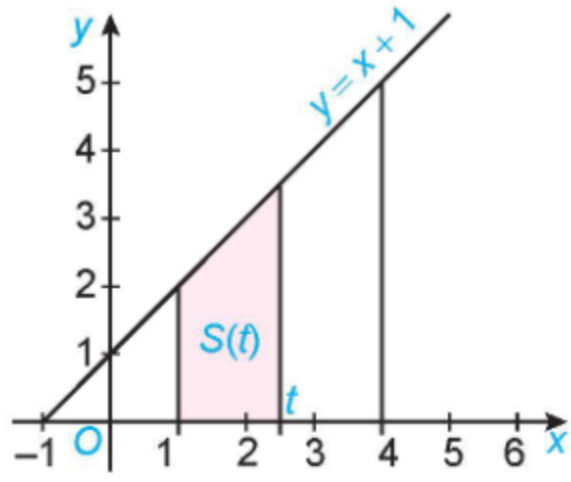
HĐ1. Diện tích của hình thang

Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = t$ $(1 \le t \le 4)$ (H.4.4).

a) Tính diện tích S của T khi $t = 4$.

b) Tính diện tích $S(t)$ của T khi $t \in [1; 4]$.

c) Chứng minh rằng $S(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = t + 1$, $t \in [1; 4]$ và diện tích $S = S(4) - S(1)$.



Hình 4.4

HĐ2. Diện tích của hình thang cong

Xét hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Ta muốn tính diện tích S của hình thang cong này.

a) Với mỗi $x \in [1; 2]$, gọi $S(x)$ là diện tích phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và x (H.4.5).

Cho $h > 0$ sao cho $x + h < 2$. So sánh hiệu $S(x + h) - S(x)$ với diện tích hai hình chữ nhật $MNPQ$ và $MNEF$ (H.4.6). Từ đó suy ra

$$0 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 2xh + h^2.$$

b) Cho $h < 0$ sao cho $x + h > 1$. Tương tự phần a, đánh giá hiệu $S(x) - S(x + h)$ và từ đó suy ra

$$2xh + h^2 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 0.$$

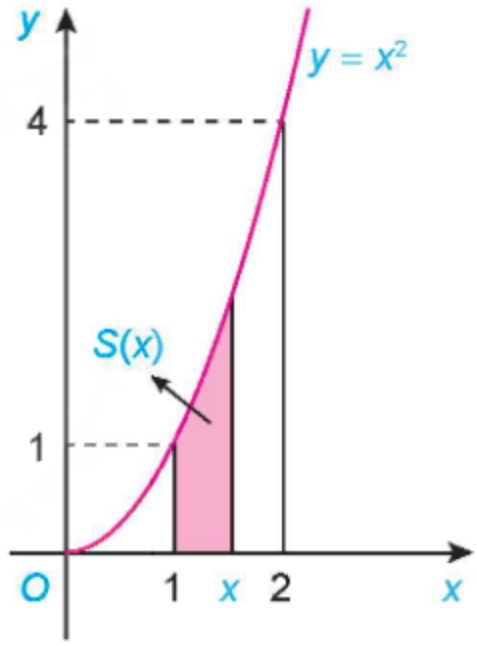
c) Từ kết quả phần a và phần b, suy ra với mọi $h \ne 0$, ta có

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \right| \le 2x|h| + h^2.$$

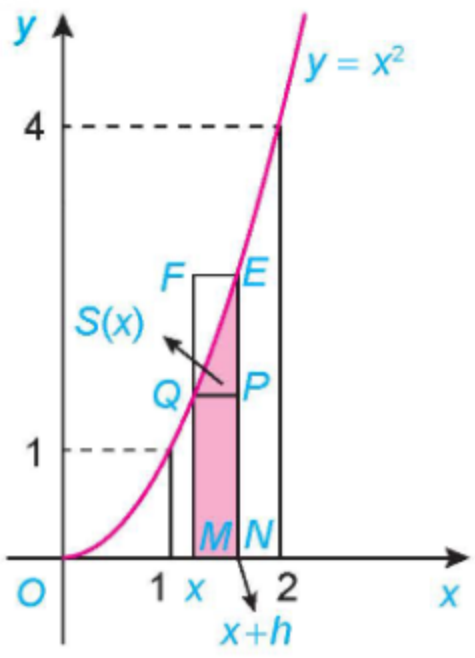
Từ đó chứng minh $S'(x) = x^2$, $x \in (1; 2)$.

Người ta chứng minh được $S'(1) = 1$, $S'(2) = 4$, tức là $S(x)$ là một nguyên hàm của x^2 trên $[1; 2]$.

d) Từ kết quả của phần c, ta có $S(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Sử dụng điều này với lưu ý $S(1) = 0$ và diện tích cần tính $S = S(2)$, hãy tính S.



Hình 4.5

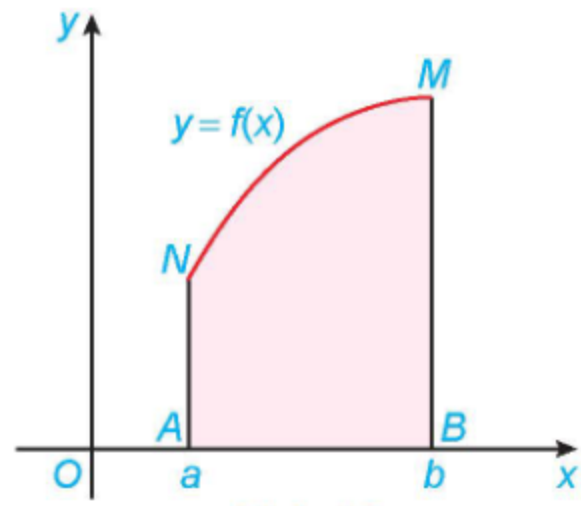


Hình 4.6

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm tuỳ ý của $f(x) = x^2$ trên $[1; 2]$. Hãy so sánh S và $F(2) - F(1)$.

Tổng quát, ta có:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



Hình 4.7

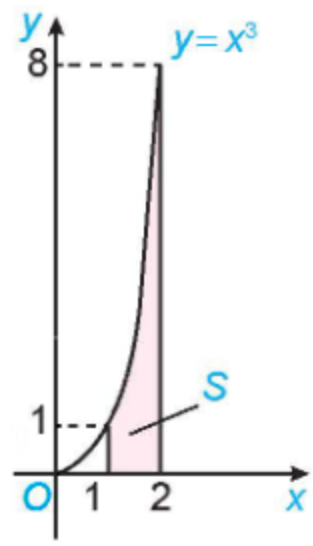
Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Giải (H.4.8)

Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Do đó, diện tích của hình thang cong cần tính là

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$



Hình 4.8

b) Định nghĩa tích phân

HĐ3. Nhận biết khái niệm tích phân

Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$, $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm tuỳ ý của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Chứng minh rằng $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Chú ý $G(x) = F(x) + C$, C là hằng số.



Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,dx$.

Chú ý

a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$.

Như vậy

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0; \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$



Ví dụ 3. Tính:

a) $\int_{-1}^{3} x^2 \mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \,\mathrm{d}t$; c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$; d) $\int_{1}^{2} 2^x \mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int_{-1}^{3} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\left[3^3 - (-1)^3\right] = \frac{28}{3}$.

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$.

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \tan u \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$.

d) $\int_{1}^{2} 2^x \mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{1}^{2} = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$.

Luyện tập 1. Tính:

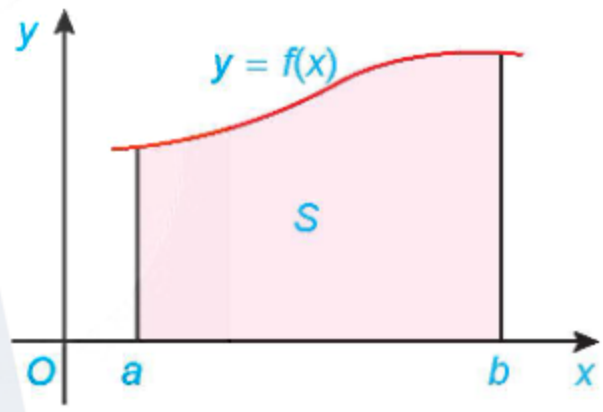
a) $\int_{0}^{1} e^x \mathrm{d}x$; b) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$; c) $\int_{0}^{2} \sin x \mathrm{d}x$; d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

Từ Khung kiến thức ở mục a và định nghĩa tích phân, ta có

Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.4.9). Vậy

$$S = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$



Hình 4.9

sách-giáo-khoa.com

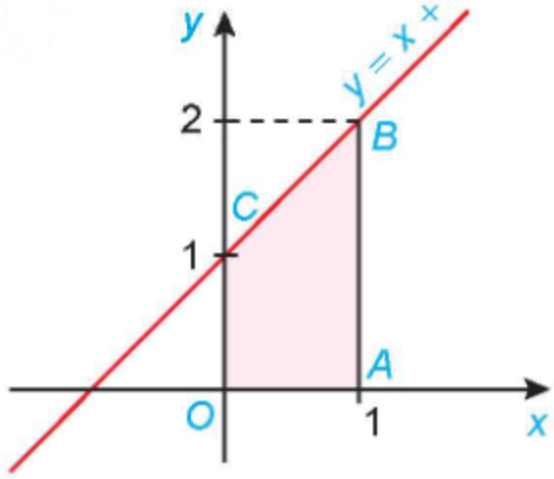
Ví dụ 4. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_{0}^{1} (x+1)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang vuông $OABC$, có đáy nhỏ $OC = 1$, đáy lớn $AB = 2$ và đường cao $OA = 1$ (H.4.10). Do đó:

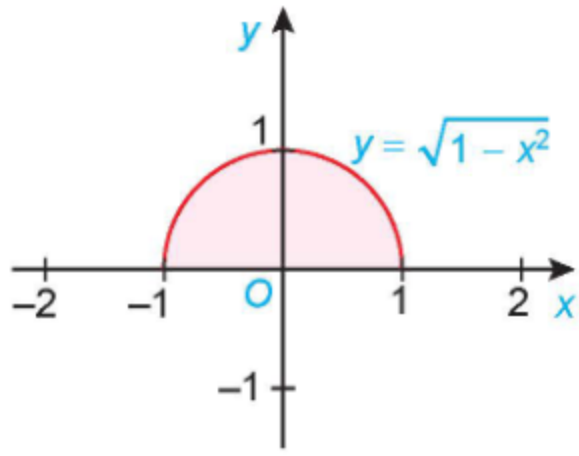
$$\int_{0}^{1} (x+1)\mathrm{d}x = S_{OABC} = \frac{1}{2}(OC + AB)\cdot OA = \frac{1}{2}(1+2)\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$



Hình 4.10

b) Ta có $y=\sqrt{1-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O và bán kính 1. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng (H.4.11).

Vậy $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.



Hình 4.11

Luyện tập 2. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_{1}^{3}(2x+1)\,dx$;

b) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Lưu ý $v(t)=s'(t)$.



Vận dụng 1. Giải quyết bài toán ở *tình huống mở đầu*.

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

HĐ4. Nhận biết tính chất của tích phân

Tính và so sánh:

a) $\int_{0}^{1}2x\,dx$ và $2\int_{0}^{1}x\,dx$;

b) $\int_{0}^{1}(x^2+x)\,dx$ và $\int_{0}^{1}x^2\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx$;

c) $\int_{0}^{3}x\,dx$ và $\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{3}x\,dx$.

Tính chất của tích phân:

Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;\,b]$. Khi đó, ta có

1) $\int_{a}^{b}kf(x)\,dx=k\int_{a}^{b}f(x)\,dx$ (k là hằng số);

2) $\int_{a}^{b}[f(x)+g(x)]\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,dx+\int_{a}^{b}g(x)\,dx$;

3) $\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,dx-\int_{a}^{b}g(x)\,dx$;

4) $\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx$ $(a<c<b)$.

sach-giao-khoa.com

Ví dụ 5. Tính:

a) $\int_1^4 \left(x^3 + 3\sqrt{x}\right)dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x - 2\cos x\right)dx$; c) $\int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2}\right)dx$.

Giải

a) $\int_1^4 \left(x^3 + 3\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4 x^3 dx + 3\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^4 + 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4$

$= \frac{1}{4}\left(4^4 - 1\right) + 2\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{255}{4} + 14 = \frac{311}{4}.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^x - 2\cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$= e^x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) - 2(1-0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 3.$

c) $\int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2}\right)dx = \int_1^4 2^x dx - 3\int_1^4 x^{-2}dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^4 + 3\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^4$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(2^4 - 2^1\right) + 3\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{14}{\ln 2} - \frac{9}{4}.$

Luyện tập 3. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{2\pi} (2x + \cos x)dx$; b) $\int_1^2 \left(3^x - \frac{3}{x}\right)dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

Ví dụ 6. Tính $\int_0^3 |x-2|dx$.

Giải

Ta có:

$\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^3 |x-2|dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx$

$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^3 = \left[(4-2)-0\right] + \left[\left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4)\right] = \frac{5}{2}.$

Luyện tập 4. Tính $\int_0^3 |2x-3|dx$.

Vận dụng 2. *Giá trị trung bình* của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$T(t) = 20 + 1{,}5(t-6),\ 6 \le t \le 12.$$

Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

sach-giao-khoa.com

BÀI TẬP

4.8. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_1^2 (2x+1)\,dx$;

b) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.9. Cho $\int_0^3 f(x)\,dx = 5$ và $\int_0^3 g(x)\,dx = 2$. Tính:

a) $\int_0^3 [f(x)+g(x)]\,dx$;

b) $\int_0^3 [f(x)-g(x)]\,dx$;

c) $\int_0^3 3f(x)\,dx$;

d) $\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\,dx$.

4.10. Tính:

a) $\int_0^3 (3x-1)^2\,dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\,dx$;

c) $\int_0^1 (e^{2x}+3x^2)\,dx$;

d) $\int_1^2 |2x+1|\,dx$.

4.11. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t)\,dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$, tức là tính $\int_1^4 |v(t)|\,dt$.

4.12. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức

$$P'(x) = -0{,}0005x + 12{,}2.$$

Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

4.13. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức

$$v = k(R^2 - r^2),$$

trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Bài 13

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

THUẬT NGỮ

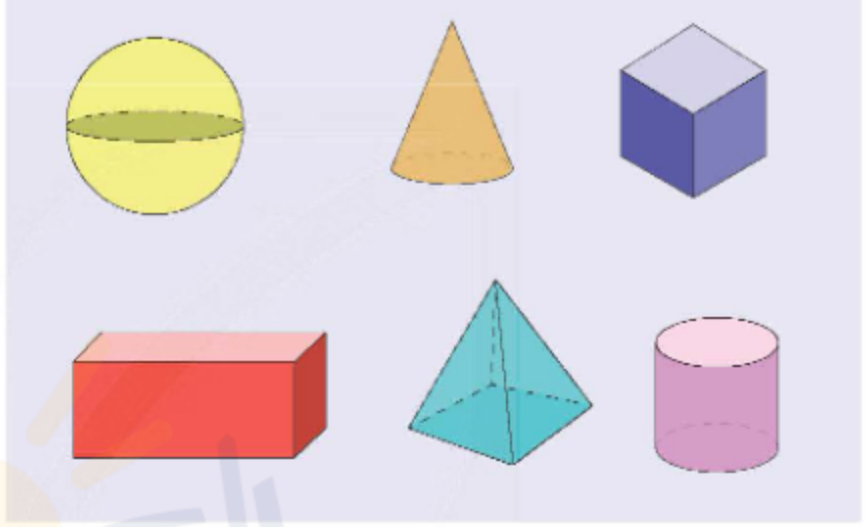
- Hình phẳng
- Thể tích
- Khối tròn xoay

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Sử dụng tích phân để tính diện tích của một số hình phẳng.
- Sử dụng tích phân để tính thể tích của một số vật thể.

Trong phần Hình học ở Trung học cơ sở và lớp 11, chúng ta đã được học công thức tính thể tích của nhiều vật thể trong không gian như khối lăng trụ, khối chóp, khối chóp cụt đều, khối trụ, khối nón, khối cầu. Tuy nhiên, ta thường phải thừa nhận các công thức này.

Bài học này sẽ cung cấp một phương pháp tổng quát giúp ta thiết lập một cách dễ dàng tất cả các công thức tính diện tích và thể tích đã được học trong Hình học, cũng như tính được diện tích của những hình phẳng và thể tích của những vật thể phức tạp hơn gặp trong thực tiễn.



1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

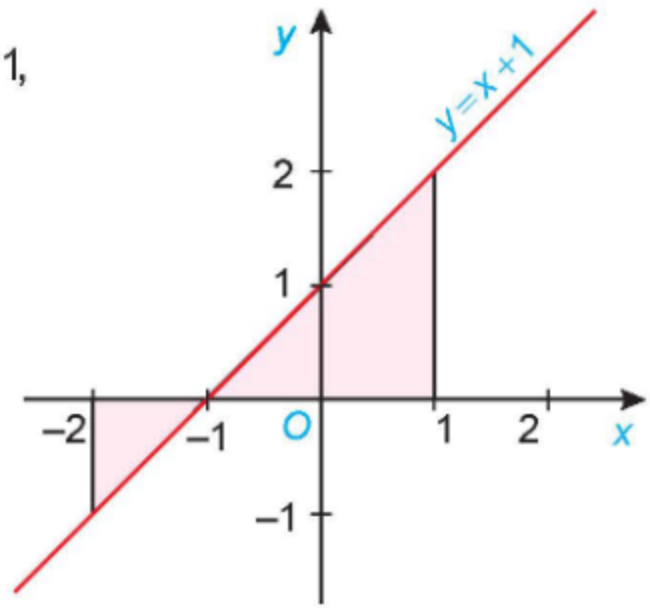
a) Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

HĐ1. Nhận biết công thức tính diện tích

Xét hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = f(x) = x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 1$ (H.4.12).

a) Tính diện tích S của hình phẳng này.

b) Tính $\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx$ và so sánh với S.

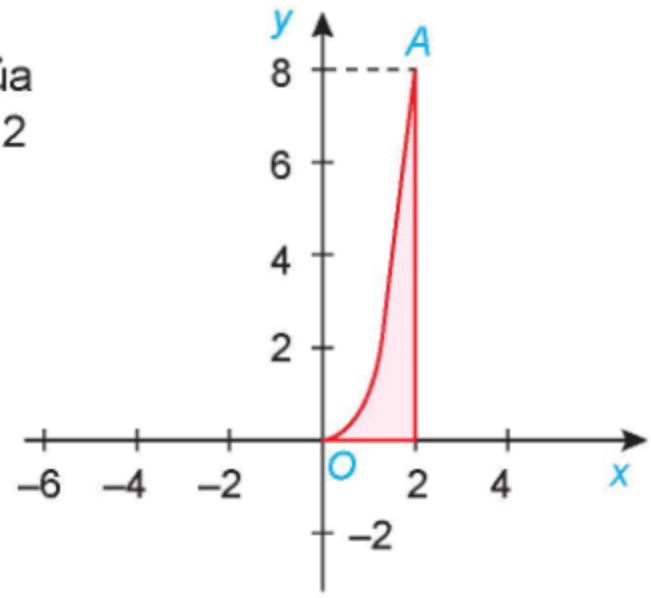


Hình 4.12

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, được tính bằng công thức

$$S = \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx.$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (H.4.13).



Hình 4.13

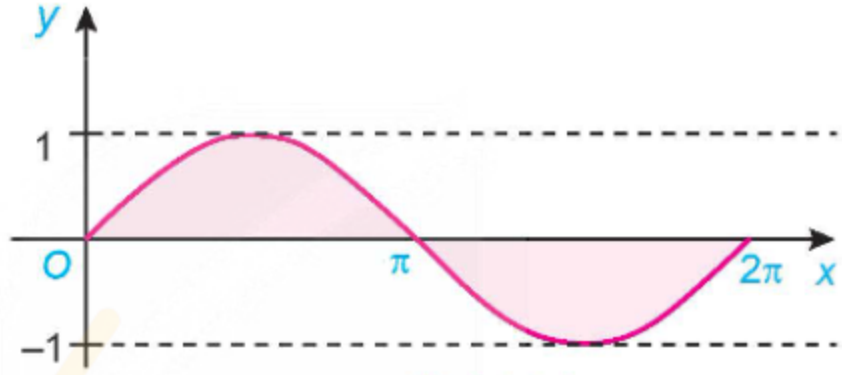
Giải

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^2 \left|x^3\right| dx = \int_0^2 x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4 - 0 = 4.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2\pi$ (H.4.14).



Hình 4.14

Giải

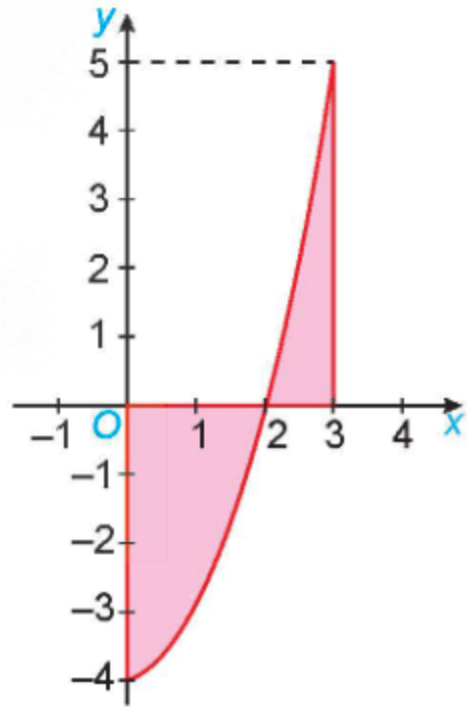
Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^{2\pi} \left|\sin x\right| dx = \int_0^{\pi} \left|\sin x\right| dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left|\sin x\right| dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Luyện tập 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ (H.4.15).

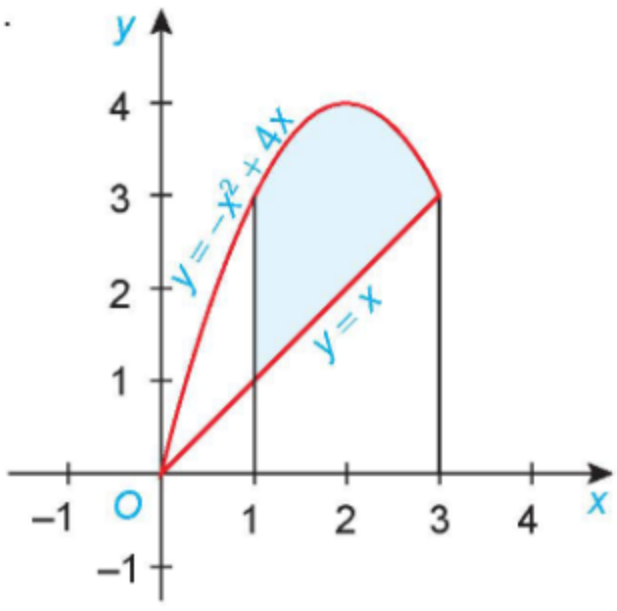


Hình 4.15

b) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

HĐ2. Nhận biết công thức tính diện tích

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$, $y = g(x) = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ (H.4.16).



Hình 4.16

sach-giao-khoa.com

a) Giả sử S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = -x^2 + 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$. Tính S_1, S_2 và từ đó suy ra S.

b) Tính $\int_1^3 |f(x) - g(x)|\,dx$ và so sánh với S.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, được tính bằng công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Chú ý. Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|.$$

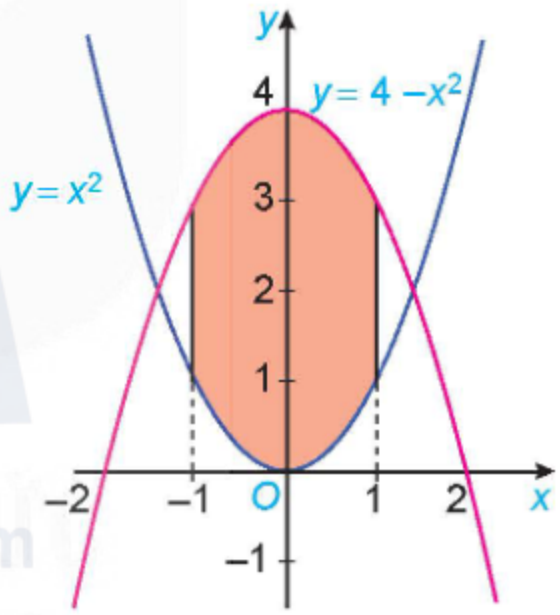
Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ (H.4.17).

Giải

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-1}^{1} |(4 - x^2) - x^2|\,dx = \int_{-1}^{1} |4 - 2x^2|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4 - 2x^2)\,dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{20}{3}.$$



Hình 4.17

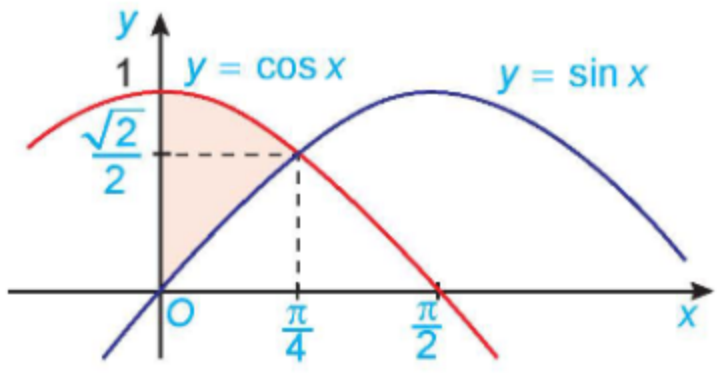
Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ (H.4.18).

Giải

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$



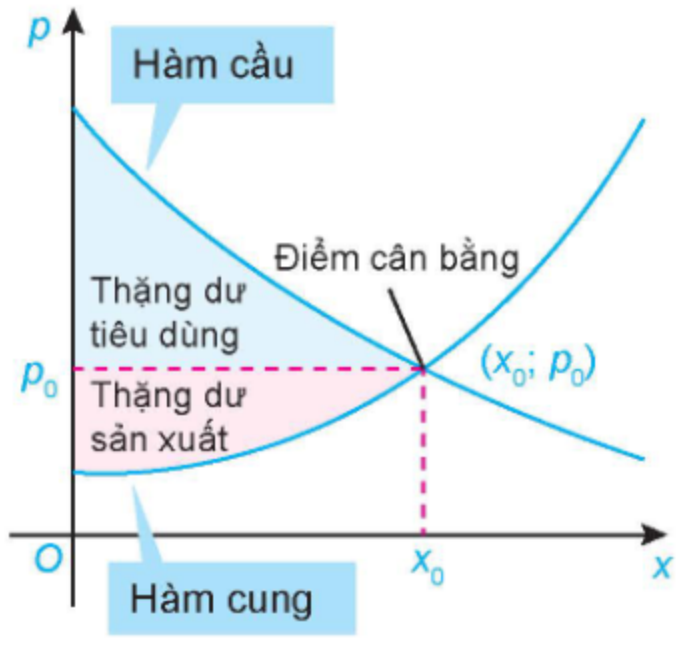
Hình 4.18

Luyện tập 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Vận dụng 1. Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là *điểm cân bằng*.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là *thặng dư tiêu dùng*. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là *thặng dư sản xuất*, như trong Hình 4.19.

(Theo *R. Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)



Hình 4.19

Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = -0{,}36x + 9$ và hàm cung: $p = 0{,}14x + 2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

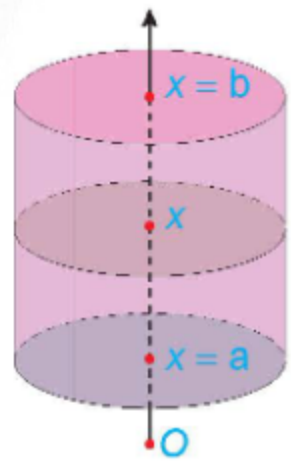
a) Tính thể tích của vật thể

HĐ3. Nhận biết công thức tính thể tích vật thể

Xét hình trụ có bán kính đáy R, có trục là trục hoành Ox, nằm giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ (H.4.20).

a) Tính thể tích V của hình trụ.

b) Tính diện tích mặt cắt $S(x)$ khi cắt hình trụ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x $(a \le x \le b)$. Từ đó tính $\int_a^b S(x)\,dx$ và so sánh với V.



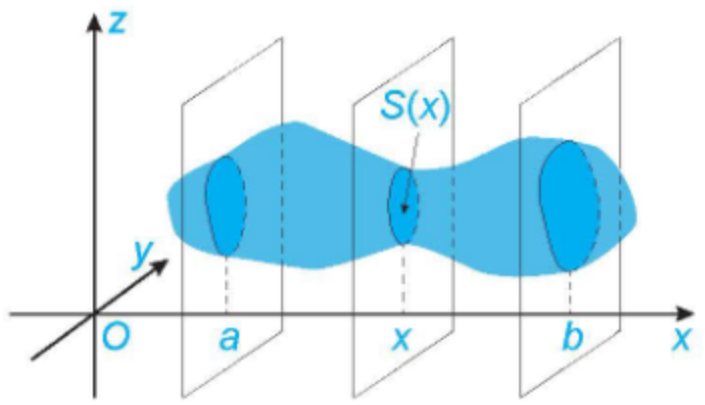
Hình 4.20

Công thức tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

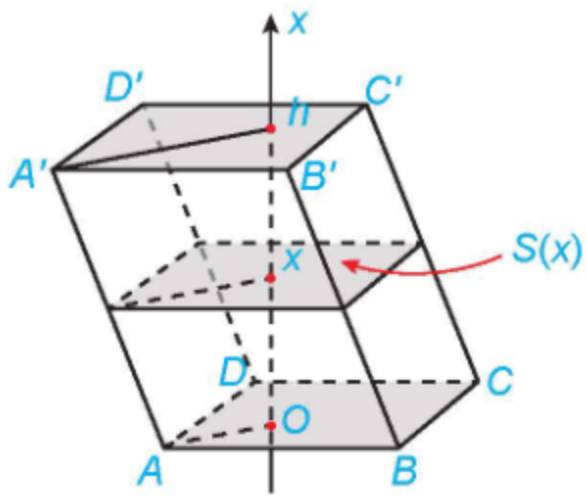
Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$



Hình 4.21

Ví dụ 5. Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.



Hình 4.22

Giải (H.4.22)

Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ và hai đáy nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = 0$ và $x = h$.

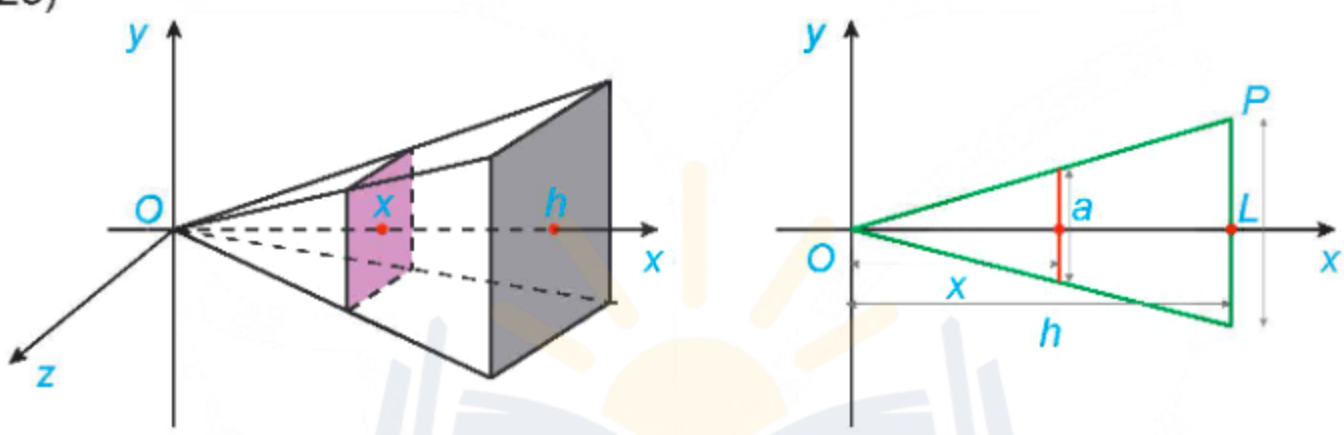
Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x $(0 \le x \le h)$ cắt khối lăng trụ theo mặt cắt có diện tích không đổi là $S(x) = S$.

Do đó, thể tích của khối lăng trụ là

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h S\,dx = Sx\Big|_0^h = Sh.$$

Ví dụ 6. Tính thể tích của khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h.

Giải (H.4.23)



Hình 4.23

Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. Khi đó, đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = h$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x $(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

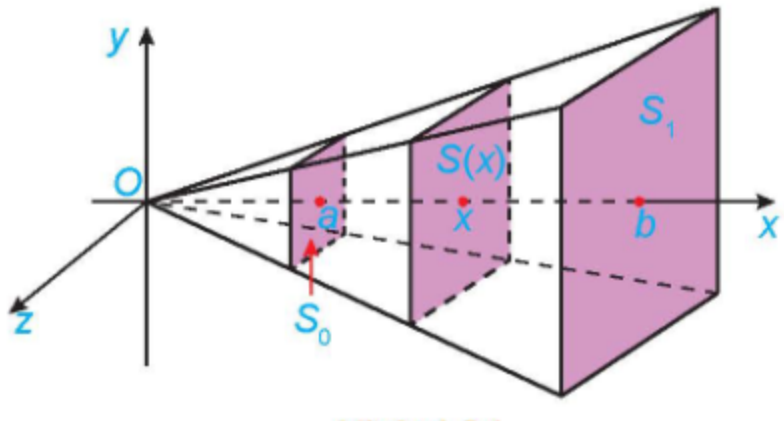
Theo định lí Thalès, ta có $\frac{x}{h} = \frac{a}{2} = \frac{a}{L}$, suy ra $a = \frac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S(x) = \frac{L^2}{h^2}x^2$.

Vậy thể tích của khối chóp này là $V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}L^2h.$

Chú ý. Bằng ứng dụng của tích phân, người ta chứng minh được thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}$ diện tích mặt đáy nhân với chiều cao của nó.

Vận dụng 2. Tính thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích hai đáy là S_0, S_1 và chiều cao bằng h (H.4.24). Từ đó suy ra công thức tính thể tích khối chóp đều có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.



Hình 4.24

b) Tính thể tích khối tròn xoay

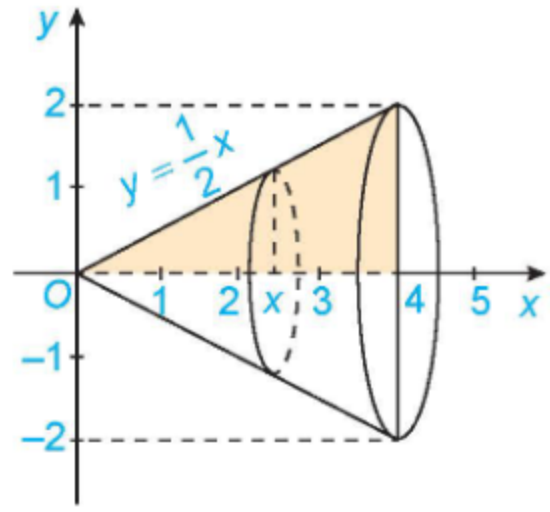
HĐ4. Nhận biết công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 4$. Khi quay hình phẳng này xung quanh trục hoành Ox ta được khối nón có đỉnh là gốc O, trục là Ox và đáy là hình tròn bán kính bằng 2 (H.4.25).

a) Tính thể tích V của khối nón.

b) Khi cắt khối nón bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng x $(0 \le x \le 4)$ thì mặt cắt thu được là một hình tròn có bán kính là $f(x)$, do đó diện tích mặt cắt là $S(x) = \pi f^2(x)$.

Tính $\pi\int_0^4 f^2(x)\,dx$ và so sánh với V.



Hình 4.25

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là một khối tròn xoay.

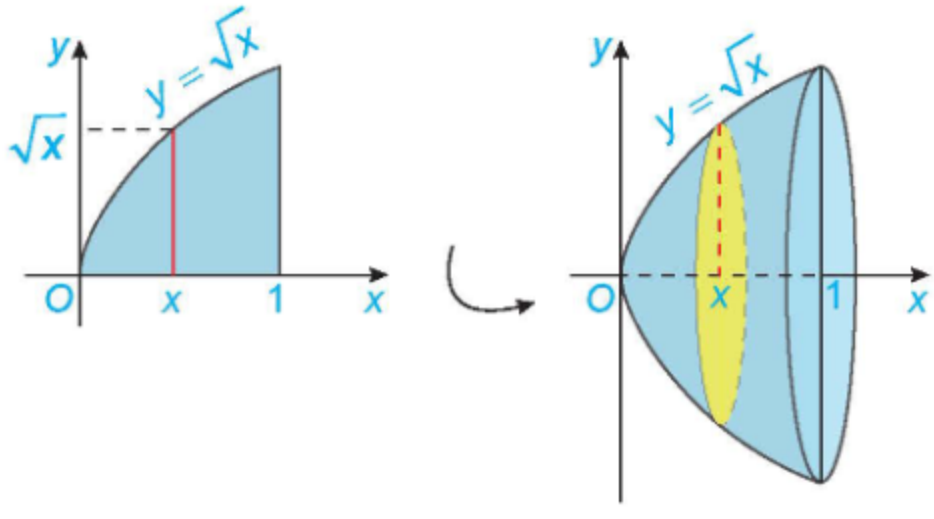
Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a; b]$ được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

Thể tích của khối tròn xoay này là

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

sách-giáo-khoa.com

Ví dụ 7. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ (H.4.26).



Hình 4.26

Giải

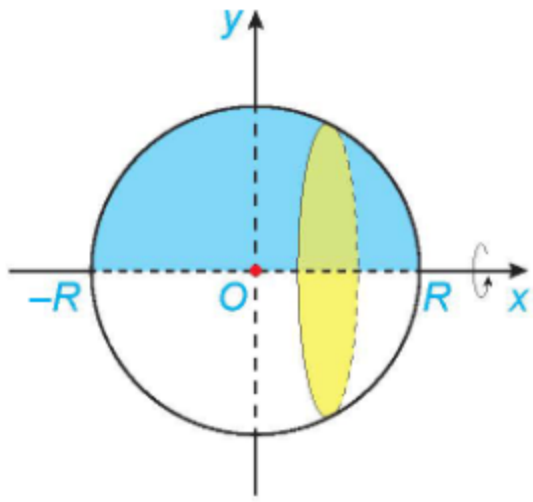
Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x\,dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 8. Tính thể tích của khối cầu bán kính R.

Giải

Khối cầu bán kính R có thể xem là vật thể sinh ra khi quay quanh trục hoành nửa hình tròn giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -R$, $x = R$ (H.4.27).



Hình 4.27

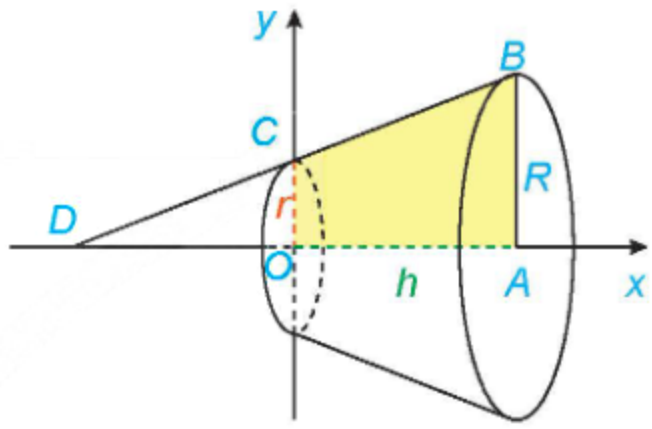
Do đó, thể tích của khối cầu bán kính R là

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Vận dụng 3. a) Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang vuông $OABC$ trong mặt phẳng Oxy với $OA = h$, $AB = R$ và $OC = r$, quanh trục Ox (H.4.28).

b) Từ công thức thu được ở câu a, hãy rút ra công thức tính thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng R và chiều cao h.



Hình 4.28

BÀI TẬP

4.14. Tính diện tích của hình phẳng được tô màu trong Hình 4.29.

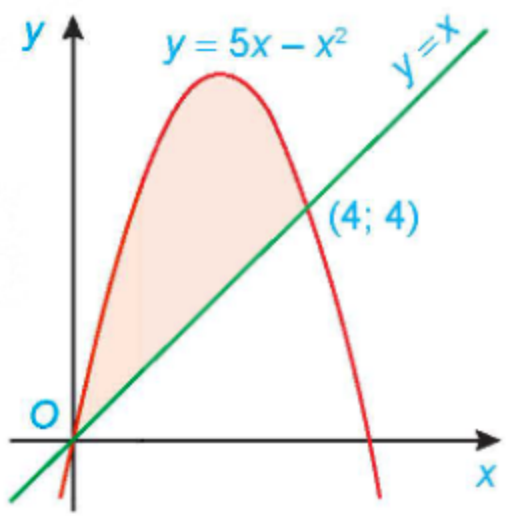
4.15. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$;

b) $y = \sin x$, $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$;

c) $y = 9 - x^2$, $y = 2x^2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$;

d) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$.



Hình 4.29

4.16. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh hoạ sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập. Đường $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$ biểu thị phân phối thu nhập thực tế. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hoá bởi hàm số

$$y = \left(0{,}00061x^2 + 0{,}0218x + 1\,723\right)^2, \quad 0 \le x \le 100,$$

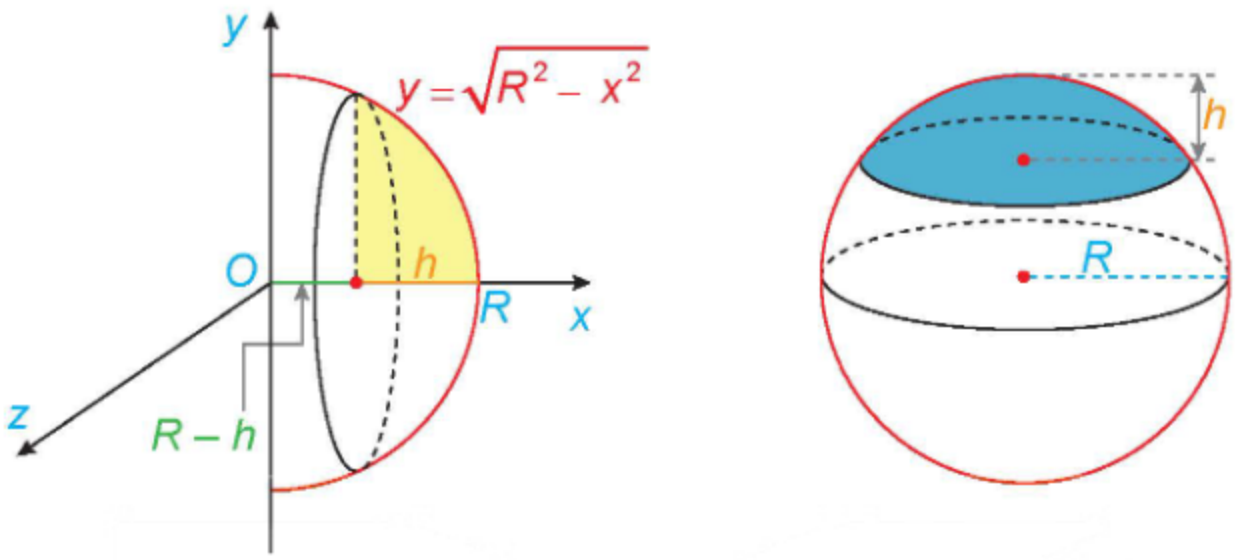
trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (Theo *R. Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*).

Tìm sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005.

sách-giáo-khoa.com

4.17. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox: $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

4.18. Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0 < h \le R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h, x = R$ xung quanh trục Ox (H.4.30). Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



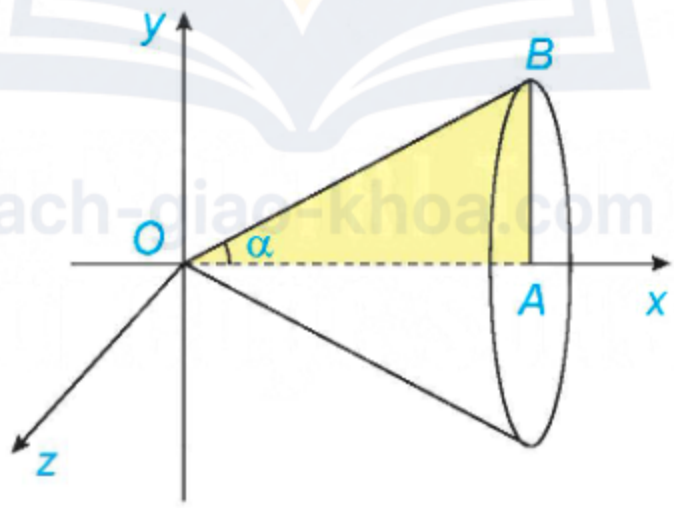
Hình 4.30

4.19. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha \left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{4}\right)$.

Gọi $\mathcal{B}$ là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox (H.4.31).

a) Tính thể tích V của $\mathcal{B}$ theo a và α.

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.



Hình 4.31

sach-giao-khoa.com

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – TRẮC NGHIỆM

4.20. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

A. $F(x) = 2\cos 2x$.

B. $F(x) = -\cos 2x$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

D. $F(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x$.

4.21. Họ các nguyên hàm của hàm số $2e^x$ là

A. $2xe^x + C$.

B. $-2e^x + C$.

C. $2e^x$.

D. $2e^x + C$.

4.22. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x - 3e^{-x}$ thoả mãn $F(0) = 4$ là

A. $F(x) = e^x - 3e^{-x}$.

B. $F(x) = e^x + 3e^{2x}$.

C. $F(x) = e^x + 3e^{-x}$.

D. $F(x) = e^x + 3e^{-x} + 4$.

4.23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(1) = 16$ và $\int_1^3 f'(x)dx = 4$. Khi đó giá trị của $f(3)$ bằng

A. 20.

B. 16.

C. 12.

D. 10.

4.24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

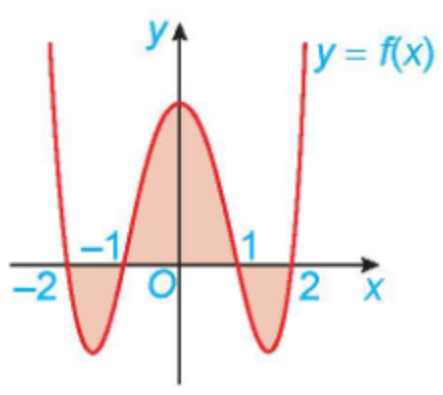
A. –9.

B. 9.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

4.25. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như Hình 4.32.



Hình 4.32

Biết $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \frac{-22}{15}$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{76}{15}$. Khi đó, diện tích của hình phẳng được tô màu là

A. 8.

B. $\frac{22}{15}$.

C. $\frac{32}{15}$.

D. $\frac{76}{15}$.

sách-giáo-khoa.com

4.26. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay (S) quanh Ox là

A. $\frac{3\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{4\pi}{3}$.

4.27. Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t)=3t^2+t$ (m/s^2). Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là 2 m/s. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

A. 8 m/s. B. 10 m/s. C. 12 m/s. D. 16 m/s.

B – TỰ LUẬN

4.28. Tìm họ các nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $y=2^x-\frac{1}{x}$; b) $y=x\sqrt{x}+3\cos x-\frac{2}{\sin^2 x}$.

4.29. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\cos x+\frac{1}{\sin^2 x}$ thoả mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

4.30. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 30 m/s. Viên đạn chuyển động với gia tốc $a=-9{,}8$ m/s^2. Tìm vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây.

4.31. Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với vận tốc là $v(t)=-\frac{2t}{5}+4$ (km/h). Nếu coi thời điểm ban đầu $t=0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu?

4.32. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^4 (x^3-2\sqrt{x})\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-\sin x)\,dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$; d) $\int_1^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

4.33. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=x$, $x=0$ và $x=1$.

4.34. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox:

a) $y=1-x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; b) $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.

4.35. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{175}x^2+\frac{3}{35}x+5\ (0\le x\le 30)$ (x, y tính theo cm) quay tròn quanh bệ gốm có trục trùng với trục hoành Ox. Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu centimét khối đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm?

CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Nối tiếp ý tưởng phương pháp toạ độ trong mặt phẳng ở lớp 10, trong chương này, thông qua hệ trục toạ độ, ta sẽ thể hiện mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu theo ngôn ngữ của đại số.

Bài 14 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

THUẬT NGỮ

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng
- Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng
- Phương trình tổng quát của mặt phẳng
- Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

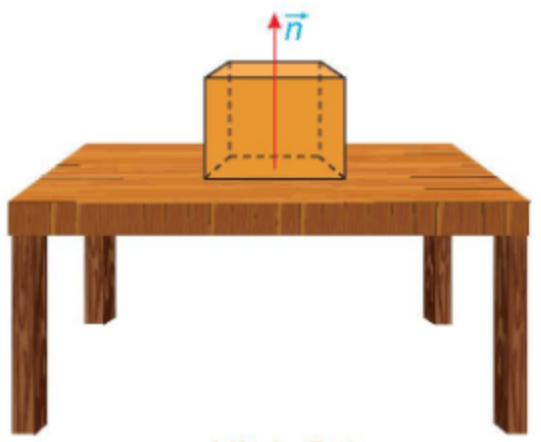
- Nhận biết phương trình mặt phẳng.
- Viết phương trình mặt phẳng trong các trường hợp: qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến, qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương, qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nhận biết hai mặt phẳng song song, hai mặt phẳng vuông góc.
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Vận dụng kiến thức về phương trình mặt phẳng, công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một vật thể chuyển động trong không gian $Oxyz$. Tại mỗi thời điểm t, vật thể ở vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$. Hỏi vật thể có chuyển động trong một mặt phẳng cố định hay không?

1. VECTƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG

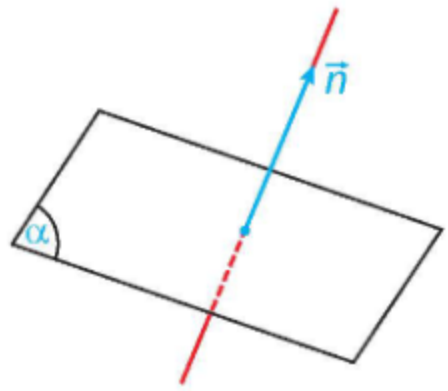
HĐ1. Hình thành khái niệm vectơ pháp tuyến

Khi một vật được đặt trên mặt bàn phẳng, mặt bàn sẽ tác động lên vật một phản lực pháp tuyến $\vec{n}$, giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với mặt bàn. Nếu mặt bàn thuộc mặt phẳng nằm ngang thì $\vec{n}$ có phương gì? (H.5.1)



Hình 5.1

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).



Hình 5.2

Chú ý

- Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).

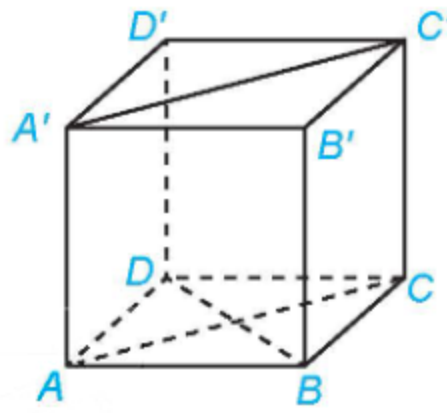
Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.5.3).

Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

c) $\overrightarrow{A'C'}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.



Hình 5.3

Giải

Vì các đường thẳng AA', BB' vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\overrightarrow{AA'}, 2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Đường thẳng BD vuông góc với hai đường thẳng AC và AA' nên vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$. Vậy $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

Đường thẳng $A'C'$ không vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Vậy các khẳng định a và b là đúng, khẳng định c là sai.

Luyện tập 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-3; 0; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

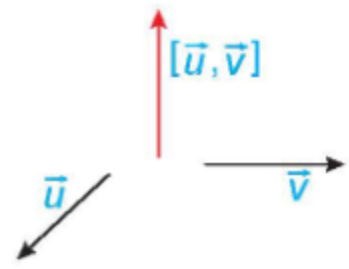
HĐ2. Tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$.

a) Vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c;\ ca' - c'a;\ ab' - a'b)$ có vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay không?

b) $\vec{n} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có mối quan hệ gì?

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c;\ ca' - c'a;\ ab' - a'b)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.



Hình 5.4

Chú ý

- $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.
- Với bốn số x, y, x', y', ta kí hiệu $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Khi đó tích có hướng của $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$ là

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; -2; 0)$ và $\vec{v} = (3; 1; -4)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Giải

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) = (8; 4; 7)$.

Luyện tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; 3; 1)$ và $\vec{v} = (4; 6; 2)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

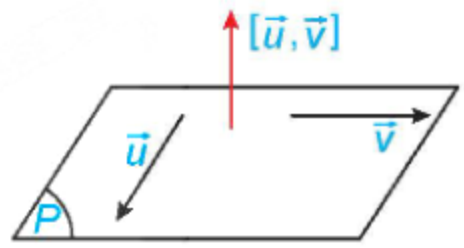
HĐ3. Hình thành khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).

a) Vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ có khác vectơ-không và giá của nó có vuông góc với cả hai giá của $\vec{u}, \vec{v}$ hay không?

b) Mặt phẳng (P) có nhận $[\vec{u}, \vec{v}]$ làm một vectơ pháp tuyến hay không?

- Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).



Hình 5.5

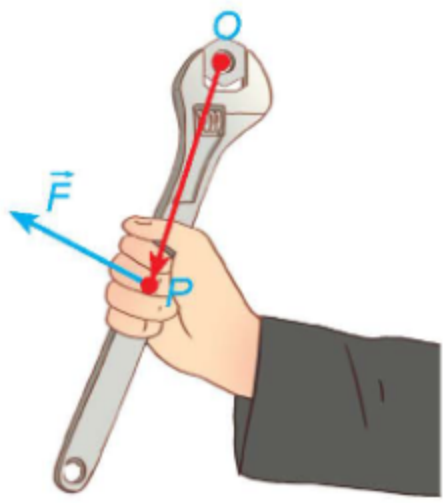
Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = (2; -1; 0)$, $\vec{v} = (1; -1; 2)$. Gọi (α) là một mặt phẳng song song với các giá của $\vec{u}, \vec{v}$. Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của (α).

Giải

Ta có $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-2; -4; -1) \neq \vec{0}$. Do đó $\vec{u}, \vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương và $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

Luyện tập 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1; -2; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-2; 3; 2)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Vận dụng 1. Moment lực là một đại lượng Vật lí, thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của một vật thể. Trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo độ dài là mét, nếu tác động vào cán mỏ lết tại vị trí P một lực $\vec{F}$ để vặn con ốc ở vị trí O (H.5.6) thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M} = [\overrightarrow{OP}, \vec{F}]$.



Hình 5.6

a) Cho $\overrightarrow{OP} = (x; y; z)$, $\vec{F} = (a; b; c)$. Tính $\vec{M}$.

b) Giải thích vì sao, nếu giữ nguyên lực tác động $\vec{F}$ trong khi thay vị trí đặt lực từ P sang P' sao cho $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP}$ thì moment lực sẽ tăng lên gấp đôi. Từ đó, ta có thể rút ra điều gì để đỡ tốn sức khi dùng mỏ lết vặn ốc?

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

HĐ4. Hình thành khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α). Gọi $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) và $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là một điểm thuộc (α).

a) Một điểm $M(x;\ y;\ z)$ thuộc (α) khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{M_0M}$ có mối quan hệ gì?

b) Điểm $M(x;\ y;\ z)$ thuộc (α) khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn hệ thức nào?

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

Chú ý. Trong không gian $Oxyz$, mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x+2y-3z^2+1=0$; b) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+2=0$; c) $y+1=0$.

Giải

Trong các phương trình trên, chỉ có phương trình $y+1=0$ có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ và thoả mãn A, B, C không đồng thời bằng 0 ($A=0,\ B=1,\ C=0$). Vì vậy, trong các phương trình trên, chỉ có phương trình $y+1=0$ là phương trình mặt phẳng.

Luyện tập 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x^2+2y^2+3z^2-1=0$; b) $\frac{x}{2}-y+\frac{z}{3}+5=0$; c) $xy+5=0$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):\ x+2y-z+1=0$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Vectơ $\vec{m}=(2;\ 4;\ -2)$ có là vectơ pháp tuyến của (α) hay không?

c) Trong hai điểm $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 1;\ 4)$, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)?

Giải

a) Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=(1;\ 2;\ -1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

b) Do $\vec{m}=2\vec{n}$ mà $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) nên $\vec{m}$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α).

c) Ta cần kiểm tra xem trong hai điểm $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 1;\ 4)$, điểm nào có toạ độ thoả mãn phương trình mặt phẳng (α).

Do $1+2\cdot3-2+1\neq0$ và $1+2\cdot1-4+1=0$ nên trong hai điểm A, B chỉ có toạ độ điểm B thoả mãn phương trình mặt phẳng (α). Vậy điểm B thuộc mặt phẳng (α), điểm A không thuộc mặt phẳng (α).

Luyện tập 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2=0$.

a) Điểm $A(-2; 1; 0)$ có thuộc (α) hay không?

b) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

3. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

HĐ5. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A; B; C)$.

Dựa vào HĐ4, hãy nêu phương trình của (α).

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A; B; C)$ thì có phương trình là:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$, với $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-4;6)$.

Giải

Mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$3(x-2)-4[y-(-1)]+6(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+6z-10=0.$$

Luyện tập 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2;-4)$ và vuông góc với trục Oz.

HĐ6. Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và biết cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a; b; c)$, $\vec{v}=(a'; b'; c')$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (α).

Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và biết cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ có thể thực hiện theo các bước sau:

- Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u}, \vec{v}]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua M và biết vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với $A(1; 2; 3)$, $B(4; 3; 5)$, $C(2; 3; 2)$, $A'(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

sách-giáo-khoa.com

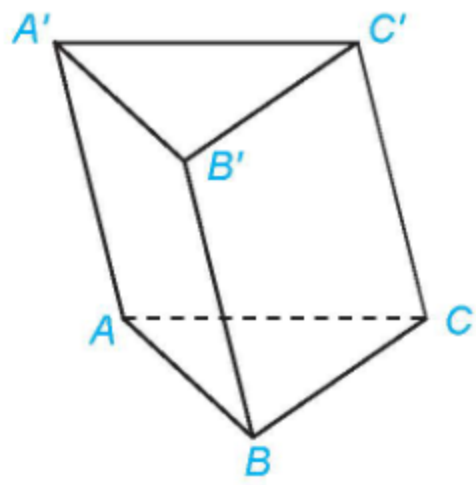
Giải (H.5.7)

Mặt phẳng $(A'B'C')$ nhận $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 1; -1)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3; 5; 2).$$

Mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua $A'(1; 1; 1)$ và nhận $\vec{n} = (-3; 5; 2)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$-3(x-1) + 5(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 2z + 4 = 0.$$



Hình 5.7

Luyện tập 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; -1), B(4; 1; 2), C(2; 3; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; -2; -1)$ đồng thời song song với trục Oy và đường thẳng BC.

HĐ7. Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1; 2; 3), B(-1; 3; 4), C(2; -1; 2).$$

a) Hãy chỉ ra một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Trong không gian $Oxyz$, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C có thể thực hiện theo các bước sau:

- Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(3; 2; 1), C(3; 1; 4)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Giải

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 0; 5)$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

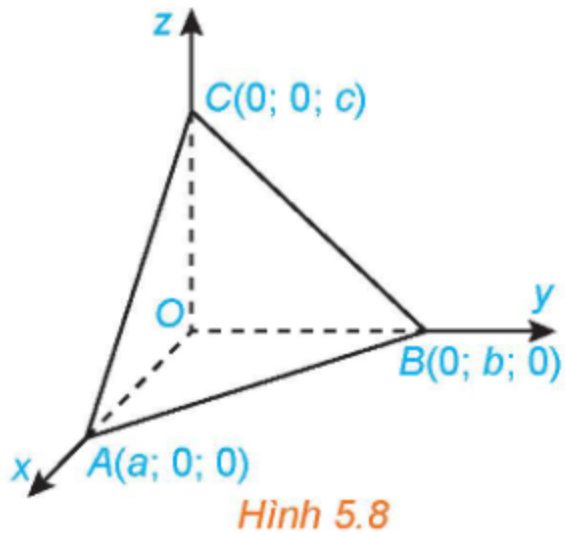
b) Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 0; 5)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (5; -3; -1)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(2; 1; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -3; -1)$ nên có phương trình:

$$5(x-2) - 3(y-1) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y - z - 8 = 0.$$

sách-giáo-khoa.com

Luyện tập 8. (H.5.8) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) không đi qua gốc toạ độ và cắt ba trục Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a, b, c \neq 0)$.



Hình 5.8

Chứng minh rằng mặt phẳng (α) có phương trình:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

(Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn).

Vận dụng 2. Trong *tình huống mở đầu*, hãy thực hiện các bước sau và trả lời câu hỏi đã được nêu ra.

a) Xác định toạ độ của vị trí M_1, M_2, M_3 của vật tương ứng với các thời điểm $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$.

b) Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$.

c) Vị trí $M(\cos t-\sin t;\cos t+\sin t;\cos t)$ có luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ hay không?

sach-giao-khoa.com

4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

HĐ8. Tìm điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0,\ (\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

với hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n'}=(A';B';C')$ tương ứng.

a) Góc giữa hai mặt phẳng (α), (β) và góc giữa hai giá của $\vec{n}$, $\vec{n'}$ có mối quan hệ gì?

b) Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến tương ứng $\vec{n}$, $\vec{n'}$ có mối quan hệ gì?

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng bất kì tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.



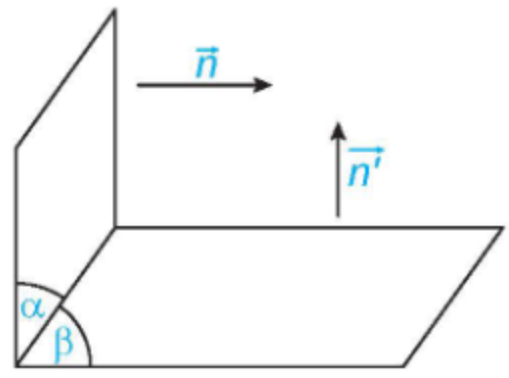
Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$

với hai vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n'} = (A'; B'; C')$ tương ứng.

Khi đó:

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$



Hình 5.9

Chú ý. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng kia.

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng hai mặt phẳng sau vuông góc với nhau:

$$(\alpha): x - 3y + 2z + 1 = 0, (\beta): 5x + y - z + 2 = 0.$$

Giải

Hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có vectơ pháp tuyến tương ứng là $\vec{n} = (1; -3; 2), \vec{n'} = (5; 1; -1)$.

Ta có $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0$ nên $\vec{n} \perp \vec{n'}$. Do đó (α) vuông góc với (β).

Luyện tập 9. Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng sau đây có vuông góc với nhau hay không?

$$(\alpha): 3x + y - z + 1 = 0, (\beta): 9x + 3y - 3z + 3 = 0.$$

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; 2; -2), B(2; 4; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 3y + z - 1 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_Q} = (1; 3; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với (Q) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$ và $\vec{n_Q} = (1; 3; 1)$. Do đó (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n_Q}\right] = (-7; 2; 1)$.

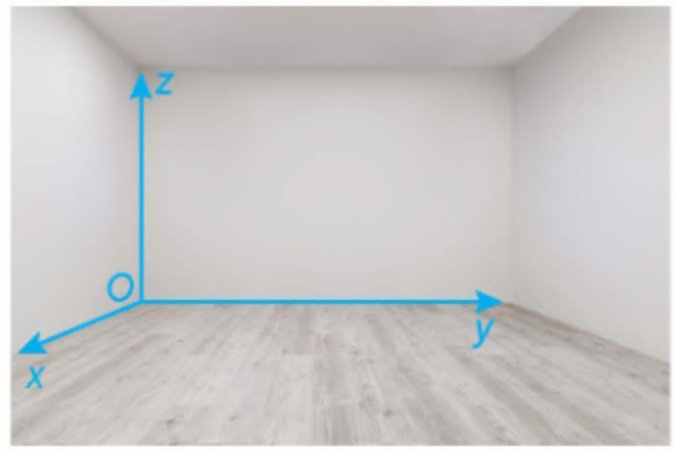
Mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n_P} = (-7; 2; 1)$ nên có phương trình:

$$-7x + 2y + z - [(-7) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)] = 0 \Leftrightarrow 7x - 2y - z - 5 = 0.$$

Vận dụng 3. (H.5.10) Trong không gian $Oxyz$, sàn của một căn phòng có dạng hình tứ giác với bốn đỉnh $O(0; 0; 0), A(2; 0; 0), B(2; 3; 0); C(0; 2\sqrt{2}; 0)$. Bốn bức tường của căn phòng đều vuông góc với sàn.

a) Viết phương trình bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó.

b) Trong bốn mặt phẳng tương ứng chứa bốn bức tường đó, hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.



Hình 5.10

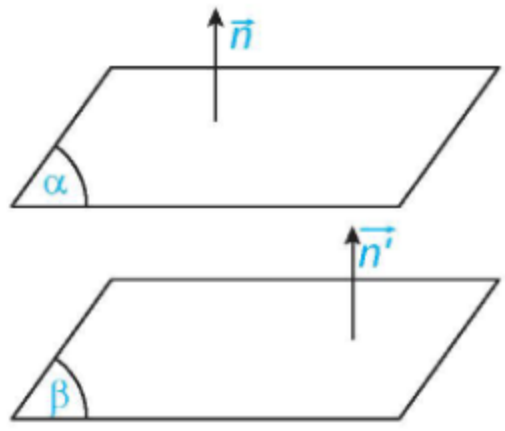
5. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI NHAU

HĐ9. Tìm điều kiện để hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với các vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A'; B'; C')$ tương ứng.



Hình 5.11

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song hoặc trùng nhau thì các vectơ pháp tuyến $\vec{n}$, $\vec{n'}$ có mối quan hệ gì?

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

với các vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A'; B'; C')$ tương ứng. Khi đó:

$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n'} = k\vec{n} \\ D' \neq kD \end{cases} \text{ với } k \text{ nào đó.}$$

Chú ý

- Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số k khác 0 sao cho

$$A' = kA, B' = kB, C' = kC, D' = kD.$$

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): 3x - y + z + \sqrt{2} = 0 \text{ và } (\beta): 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + 1 = 0.$$

Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?

Giải

Các mặt phẳng trên có vectơ pháp tuyến tương ứng là $\vec{n_\alpha} = (3; -1; 1)$, $\vec{n_\beta} = \left(3\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Do $\vec{n_\beta} = \sqrt{2} \cdot \vec{n_\alpha}$ và $1 \neq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ nên hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

Luyện tập 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng:

$$(\alpha): 5x + 2y - 4z + 6 = 0 \text{ và } (\beta): 10x + 4y - 2z + 12 = 0.$$

a) Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?

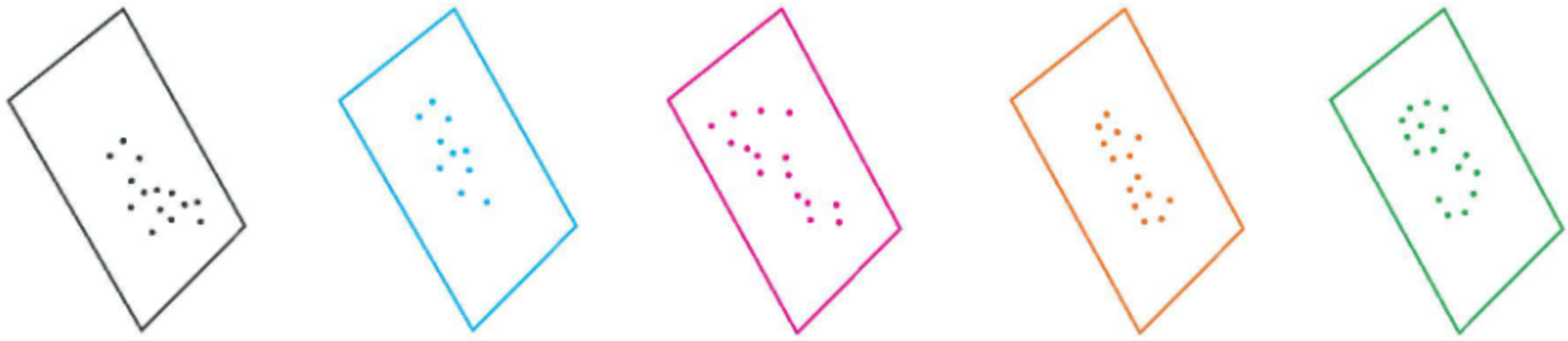
b) Chứng minh rằng điểm $M(1; -3; 5)$ không thuộc mặt phẳng (α) nhưng thuộc mặt phẳng (β).

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; -3; 5)$ và song song với (α).

Vận dụng 4. Trong một kì thi tuyển sinh có ba môn thi Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh. Trong không gian $Oxyz$, người ta biểu diễn kết quả thi của mỗi thí sinh bởi điểm có hoành độ, tung độ, cao độ tương ứng là điểm Toán, Ngữ văn, Tiếng Anh của thí sinh đó.

a) Chứng minh rằng các điểm biểu diễn tương ứng với các thí sinh có tổng số điểm ba môn thi bằng 27 (nếu có) cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x + y + z - 27 = 0$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một số mặt phẳng đôi một song song với nhau sao cho hai điểm biểu diễn ứng với hai thí sinh có tổng số điểm thi bằng nhau thì cùng thuộc một mặt phẳng trong số các mặt phẳng đó.

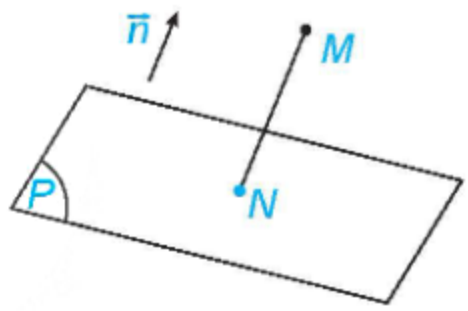


$x + y + z - 20 = 0$ $x + y + z - 24 = 0$ $x + y + z - 27 = 0$

Hình 5.12

6. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

HĐ10. Thiết lập công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng



Hình 5.13

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) (H.5.13).

a) Giải thích vì sao tồn tại số k để $\overrightarrow{MN} = k\vec{n}$. Tính toạ độ của N theo k, toạ độ của M và các hệ số A, B, C, D.

b) Thay toạ độ của N vào phương trình mặt phẳng (P) để từ đó tính k theo toạ độ của M và các hệ số A, B, C, D.

c) Từ $|\overrightarrow{MN}| = |k||\vec{n}|$, hãy tính độ dài của đoạn thẳng MN theo toạ độ của M và các hệ số A, B, C, D. Từ đó suy ra công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ là:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Giải

Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$ là:

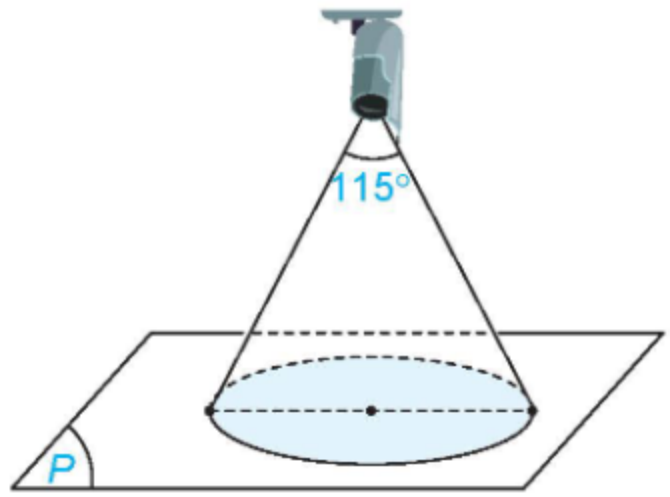
$$d(M, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4.$$

Luyện tập 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + 3y + z + 2 = 0$ và $(Q) : x + 3y + z + 5 = 0$.

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Lấy một điểm thuộc (P), tính khoảng cách từ điểm đó đến (Q). Từ đó tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Vận dụng 5. (H.5.14) Góc quan sát ngang của một camera là 115°. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(1; 2; 4)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z + 3 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)



Hình 5.14

BÀI TẬP

5.1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và vuông góc với trục Ox.

5.2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(1; -1; 3)$, $B(0; 2; 4)$, $D(2; -1; 1)$, $A'(0; 1; 2)$.

a) Tính toạ độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

5.3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q) : 3x + 2y - z = 0$, $(R) : x + y - z = 0$.

5.4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2; 3; -1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q) : x + 2y - 3z + 1 = 0$.

5.5. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 1 = 0$.

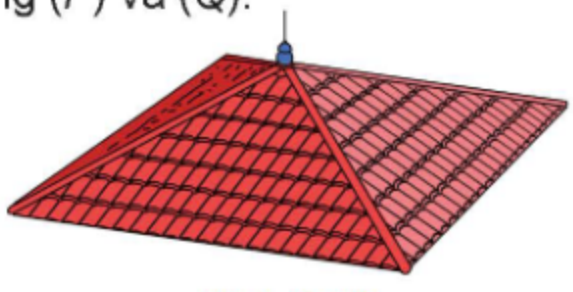
5.6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$, $(Q) : x + y + z + 6 = 0$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng đã cho song song với nhau và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

5.7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + 3y - z = 0$, $(Q) : x - y - 2z + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

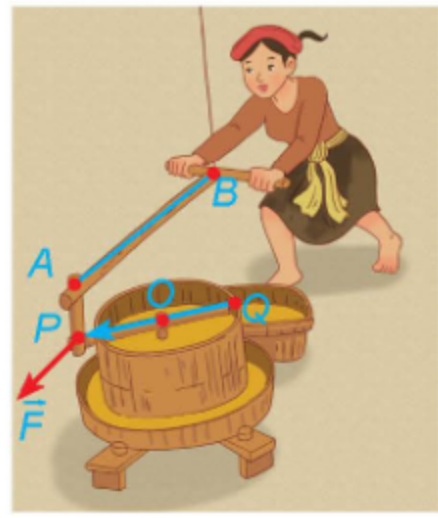
b) Tìm điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

5.8. Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?


Hình 5.15

5.9. Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z - 1 = 0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x + y + 50z - 100 = 0$. Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

5.10. Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo độ dài là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị trí P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M} = [\overrightarrow{OP}, \vec{F}]$ (H.5.16). Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vectơ moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng.



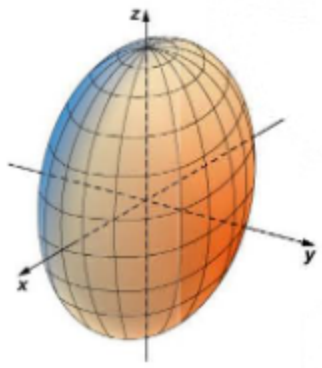
Hình 5.16

Em có biết?

Hình học giải tích hay còn gọi là hình học toạ độ là lĩnh vực toán học dùng ngôn ngữ và phương pháp đại số để nghiên cứu hình học. Trong hình học giải tích, mỗi đối tượng hình học được cho tương ứng với một đối tượng đại số: điểm cho tương ứng với toạ độ của điểm, đường cho tương ứng với phương trình của đường, mặt cho tương ứng với phương trình của mặt. Ngoài phương trình mặt phẳng đã được trình bày ở bài học trên và phương trình mặt cầu sẽ được học trong Bài 17, sau đây là phương trình của một số mặt xuất hiện nhiều trong cuộc sống:

Mặt ellipsoid hay còn gọi là mặt trái xoan (H.5.17) có phương trình:

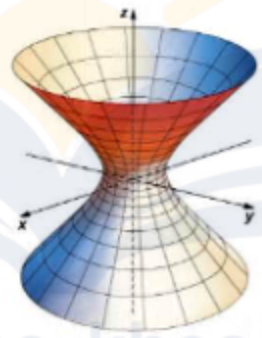
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hình 5.17

Mặt hyperboloid một tầng (H.5.18) có phương trình:

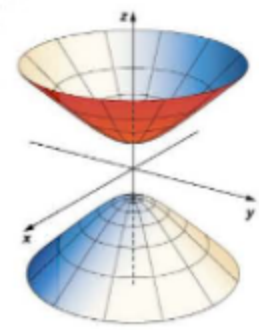
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hình 5.18

Mặt hyperboloid hai tầng (H.5.19) có phương trình:

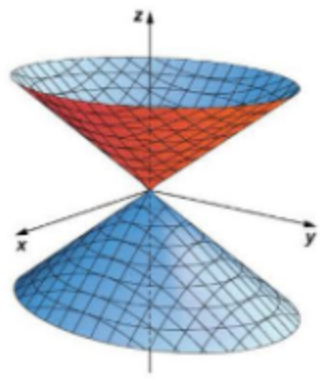
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Hình 5.19

Mặt nón elliptic (H.5.20) có phương trình:

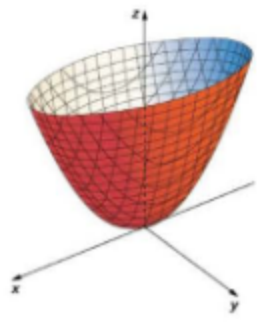
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Hình 5.20

Mặt paraboloid elliptic (H.5.21) có phương trình:

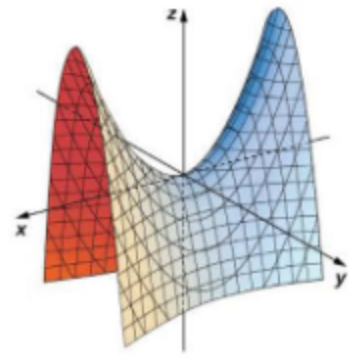
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



Hình 5.21

Mặt paraboloid hyperbolic hay còn gọi là mặt yên ngựa (H.5.22) có phương trình:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Hình 5.22

(a, b, $c > 0$ và không bằng nhau.)

sach-giao-khoa.com.vn

Bài 15 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

THUẬT NGỮ

- Vectơ chỉ phương của đường thẳng
- Phương trình tham số của đường thẳng
- Phương trình chính tắc của đường thẳng
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau
- Hai đường thẳng song song với nhau
- Hai đường thẳng trùng nhau
- Hai đường thẳng chéo nhau
- Hai đường thẳng cắt nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.
- Nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng.
- Vận dụng kiến thức về phương trình đường thẳng, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt ở điểm $M(2; 3; -4)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(-1; 0; 8)$. Một tấm bìa chắn đường truyền của ánh sáng có dạng hình tròn với tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính bằng 3 và đặt trong mặt phẳng (Oxy). Hỏi tấm bìa có che khuất tầm nhìn của người quan sát đối với vật đặt ở điểm N hay không?

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng

HĐ1. Hình thành khái niệm vectơ chỉ phương của đường thẳng

Trong không gian, cho điểm M và vectơ $\vec{u}$ khác vectơ-không. Khẳng định nào trong hai khẳng định sau là đúng?

a) Có duy nhất đường thẳng đi qua M và vuông góc với giá của $\vec{u}$.

b) Có duy nhất đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với giá của $\vec{u}$.

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



Hình 5.23

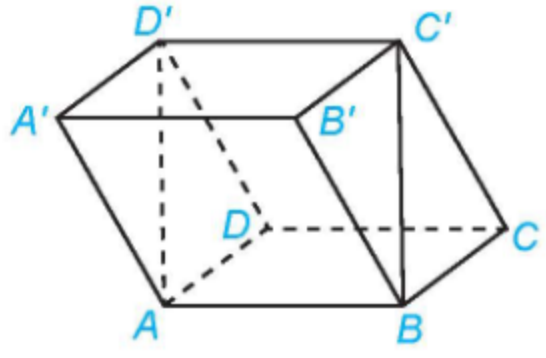
Chú ý

- Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra các vectơ chỉ phương của đường thẳng BC' mà điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó đều là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

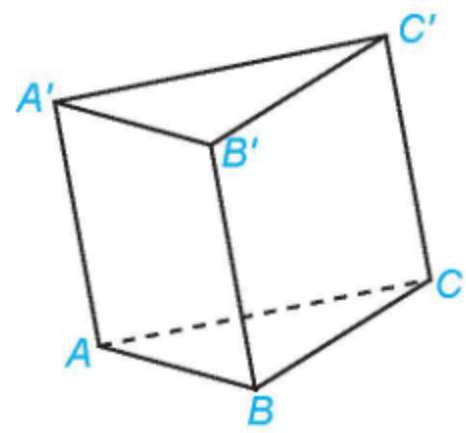
Giải (H.5.24)

Đường thẳng BC' nhận các vectơ $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{D'A}$ là các vectơ chỉ phương.



Hình 5.24

Luyện tập 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.5.25). Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối đều là đỉnh của hình lăng trụ, những vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB?



Hình 5.25

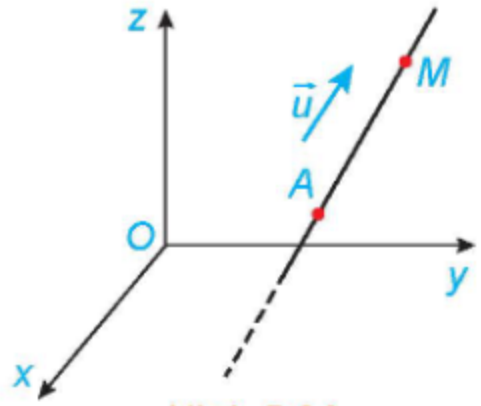
b) Phương trình tham số của đường thẳng

HĐ2. Hình thành khái niệm phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, một vật thể chuyển động với vectơ vận tốc không đổi $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ và xuất phát từ điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ (H.5.26).

a) Hỏi vật thể chuyển động trên đường thẳng nào (chỉ ra điểm mà nó đi qua và vectơ chỉ phương của đường thẳng đó)?

b) Giả sử tại thời điểm t ($t > 0$) tính từ khi xuất phát, vật thể ở vị trí $M(x; y; z)$. Tính x, y, z theo a, b, c, x_0, y_0, z_0 và t.



Hình 5.26

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số, $t \in \mathbb{R}$).

Chú ý

- Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0, hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ xác định một đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng đó và ngược lại.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 \\ z = 2t. \end{cases}$

a) Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ' đi qua $A(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (3; 0; 2)$.

Giải

a) Do Δ có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$

nên điểm $M(-1; 1; 0)$ thuộc Δ và $\vec{u}(3; 0; 2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Đường thẳng Δ' có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = 1 \\ z = 2s. \end{cases}$

Luyện tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$

a) Hãy chỉ ra hai điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc toạ độ $O(0; 0; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; 3; 1)$.

c) Phương trình chính tắc của đường thẳng

HĐ3. Hình thành khái niệm phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ (a, b, c là các số khác 0).

a) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc Δ khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ và $\vec{u} = (a; b; c)$ có mối quan hệ gì?

b) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc Δ khi và chỉ khi các số $\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b}, \frac{z - z_0}{c}$ có mối quan hệ gì?

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số khác 0.

Hệ phương trình:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{1}$.

Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 0}{3} = \frac{z - (-2)}{1}$ nên điểm $A(1; 0; -2)$ thuộc Δ và $\vec{u} = (2; 3; 1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Luyện tập 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{5}$. Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của Δ và hai điểm thuộc Δ.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -5; 1)$.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases}$ và có phương trình chính tắc là:

$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-5} = \frac{z - 4}{1}$.

Luyện tập 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 3)$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 4; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y = 0$.

Giải

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; 0)$. Giá của $\vec{n} = (3; 2; 0)$ và Δ cùng vuông góc với (α) nên chúng trùng nhau hoặc song song với nhau. Do đó Δ nhận $\vec{n} = (3; 2; 0)$ làm một vectơ chỉ phương.

Vậy Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 5. \end{cases}$

Nhận xét. Đường thẳng Δ trong Ví dụ 5 không có phương trình chính tắc.

Luyện tập 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oyz).

d) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

HĐ4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của đường thẳng A_1A_2.

b) Viết phương trình đường thẳng A_1A_2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1; z_1)$ và $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Đường thẳng A_1A_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

- Đường thẳng A_1A_2 có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- Trong trường hợp $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ thì đường thẳng A_1A_2 có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(2; 4; 0)$.

Giải

Đường thẳng AB đi qua $A(1; 2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$. Do đó AB có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

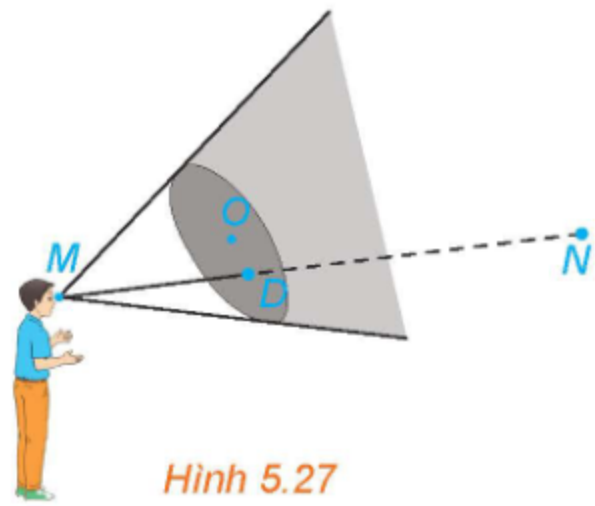
Luyện tập 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(2; 4; 6)$.

Vận dụng 1. (H.5.27) Trong *tình huống mở đầu* hãy thực hiện các bước sau và trả lời câu hỏi đã được nêu ra.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng MN.

b) Tính toạ độ giao điểm D của đường thẳng MN với mặt phẳng (Oxy).

c) Hỏi điểm D có nằm giữa hai điểm M và N hay không?



Hình 5.27

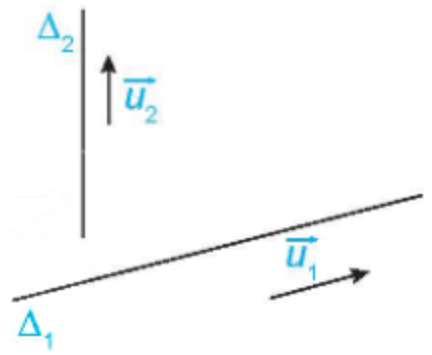
2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

HĐ5. Tìm điều kiện để hai đường thẳng vuông góc với nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (a_2; b_2; c_2)$.

a) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai giá của $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ có mối quan hệ gì?

b) Tìm điều kiện đối với $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ để Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.



Hình 5.28

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó:

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng hai đường thẳng sau vuông góc với nhau:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}, \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 3 + 8s. \end{cases}$$

Giải

Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; -3; -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1; -2; 8)$.

Do $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 = 0$ nên $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Luyện tập 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Hỏi đường thẳng Δ có vuông góc với trục Oz hay không?

Vận dụng 2. Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$, hai con đường đó tương ứng thuộc hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}, \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 2s \\ z = 1. \end{cases}$$

Hỏi hai con đường trên có vuông góc với nhau hay không?

sách-giáo-khoa.com

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

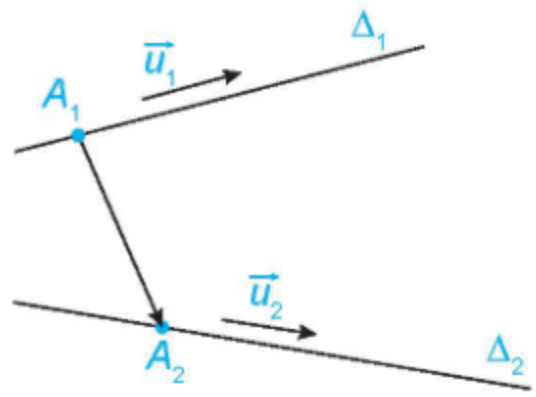
HĐ6. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ và tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2;c_2)$ (H.5.29).

a) Tìm điều kiện đối với $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ để Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau.

b) Giả sử $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}$ và $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=0$ thì Δ_1 và Δ_2 có cắt nhau hay không?

c) Giả sử $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq 0$ thì Δ_1 và Δ_2 có chéo nhau hay không?



Hình 5.29

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ và tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó:

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và $A_1\notin\Delta_2$.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và $A_1\in\Delta_2$.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\perp\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=0.\end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq 0$.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng hai đường thẳng sau vuông góc với nhau và chéo nhau:

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=-1+2t\end{cases}\quad\text{và}\quad\Delta_2:\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Giải

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $A_1(1;2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $A_2(4;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(3;1;-1)$.

Vì $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=1\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\cdot(-1)=0$ nên $\overrightarrow{u_1}$ vuông góc với $\overrightarrow{u_2}$. Do đó Δ_1 vuông góc với Δ_2.

Ta có $\overrightarrow{A_1A_2}=(3;-3;1)$ và $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;7;4)$.

Do $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=3\cdot(-1)+(-3)\cdot 7+1\cdot 4=-20\neq 0$ nên Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Luyện tập 8. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng hai đường thẳng sau song song với nhau:

$$\Delta_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}\quad\text{và}\quad\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{3}.$$

Ví dụ 9. Trong không gian *Oxyz*, chứng minh rằng hai đường thẳng sau cắt nhau:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = -6 + s \\ y = 5 + s \\ z = 5 + 2s. \end{cases}$$

Giải

Đường thẳng Δ_1 đi qua $A_1(1; 2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1; 1; 2)$. Đường thẳng Δ_2 đi qua $A_2(-6; 5; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 2)$. Ta có $\overrightarrow{A_1A_2} = (-7; 3; 6)$ và $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0; 4; -2)$.

Do $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-7) \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = 0$ và $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0}$ nên hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

Luyện tập 9. Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và $\Delta_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{4}$. Chứng minh rằng:

a) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau;

b) Đường thẳng Δ_1 và trục *Ox* chéo nhau;

c) Đường thẳng Δ_2 trùng với đường thẳng $\Delta_3: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+4}{4}$;

d) Đường thẳng Δ_2 cắt trục *Oz*.

Chú ý. Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vectơ chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó theo tiêu chuẩn sau đây.

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (a_2; b_2; c_2)$ và có phương trình tham số:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t, \end{cases} \qquad \Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 s \\ y = y_2 + b_2 s \\ z = z_2 + c_2 s. \end{cases}$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t, s: $\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 s \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 s \end{cases}$ (*).

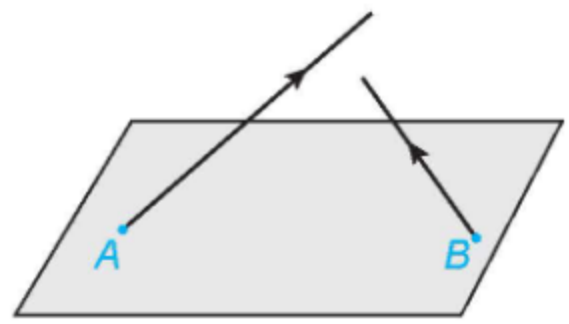
Khi đó:

- $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và hệ (*) vô nghiệm.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ (*) có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương và hệ (*) vô nghiệm.

Luyện tập 10. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = s \\ y = 1 + 2s \\ z = 3s. \end{cases}$$

Vận dụng 3. (H.5.30) Trong không gian $Oxyz$, có hai vật thể lần lượt xuất phát từ $A(1; 2; 0)$ và $B(3; 5; 0)$ với vectơ vận tốc không đổi tương ứng là $\overrightarrow{v_1} = (2; 1; 3), \overrightarrow{v_2} = (1; 2; 1)$. Hỏi trong quá trình chuyển động, hai vật thể trên có va chạm vào nhau hay không?



Hình 5.30

BÀI TẬP

5.11. Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 1; 2)$ và song song với đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+5}{3}$.

5.12. Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z - 1 = 0$.

5.13. Trong không gian $Oxyz$, viết các phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2; 3; -1)$ và $B(1; -2; 4)$.

5.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

5.15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

a) Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2.

5.16. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s. \end{cases}$$

sách giáo-khoa.com

5.17. Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian *Oxyz*, hai con đường đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình:

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3} \text{ và } \Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) Hai con đường trên có vuông góc với nhau hay không?

b) Nút giao thông trên có phải là nút giao thông khác mức hay không?



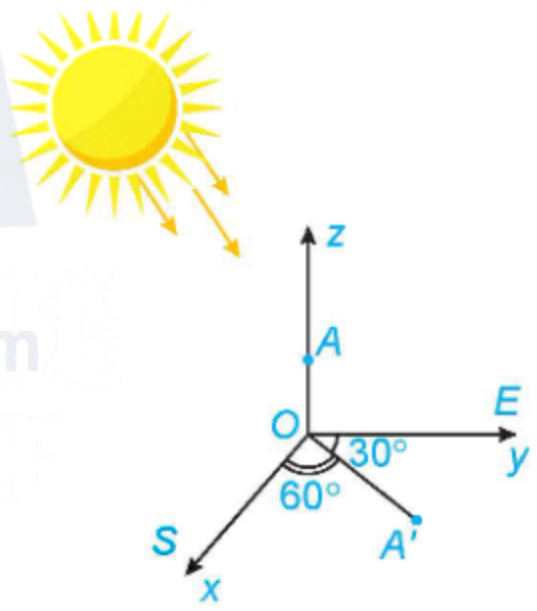
Hình 5.31. Hình ảnh một nút giao thông khác mức

5.18. Trong không gian *Oxyz*, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1; 3; 4)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2; 1; 6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu trong mỗi tình huống sau hay không?

a) Mục tiêu đặt tại điểm $M\left(7; \frac{7}{2}; 21\right)$.

b) Mục tiêu đặt tại điểm $N(-3; 1; -8)$.

5.19. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí *O* trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng $S60°E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°) (H.5.32). Chọn hệ trục *Oxyz* có gốc toạ độ là *O*, tia *Ox* chỉ hướng nam, tia *Oy* chỉ hướng đông, tia *Oz* chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét.



Hình 5.32

Bài 16

CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

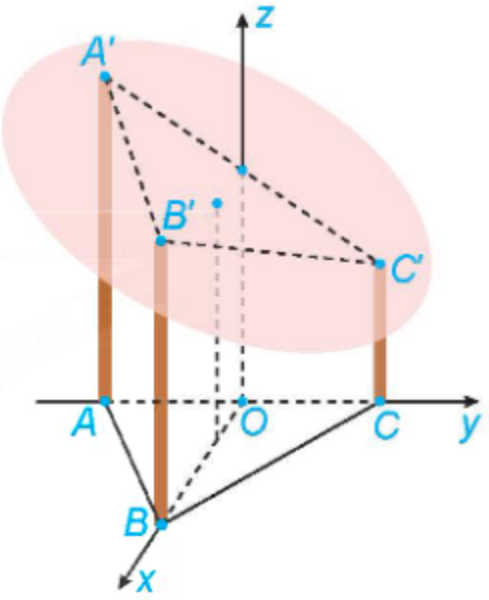
THUẬT NGỮ

- Góc giữa hai đường thẳng
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Góc giữa hai mặt phẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- Vận dụng kiến thức về góc vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (H.5.33). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 7 m, 6 m, 5 m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 4 m. Hỏi mái nhà nghiêng so với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu độ?



Hình 5.33

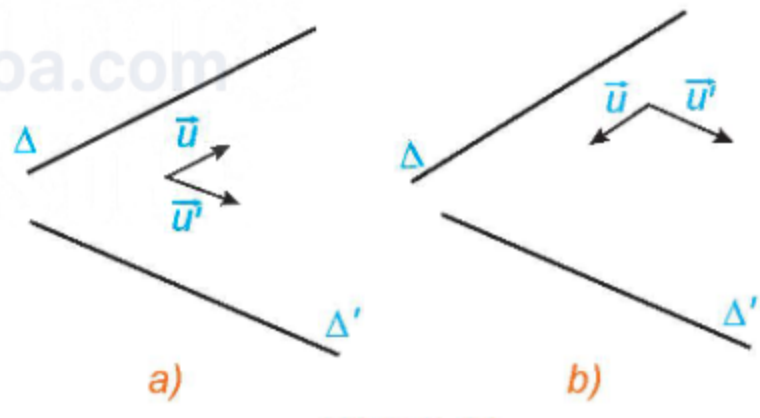
1. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Tìm mối quan hệ của góc giữa hai đường thẳng và góc giữa hai vectơ chỉ phương

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có các vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u'} = (a'; b'; c')$ (H.5.34).

a) Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc (Δ, Δ') và $(\vec{u}, \vec{u'})$.

b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa $\cos(\Delta, \Delta')$ và $\left|\cos(\vec{u}, \vec{u'})\right|$?



Hình 5.34

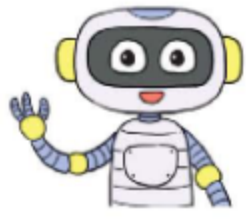
Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{u'} = (a'; b'; c')$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left|\cos(\vec{u}, \vec{u'})\right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases} \text{ và } \Delta': \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 + 2s \\ z = 4 + s. \end{cases}$$

Trong bài học này, nếu không nói gì thêm, ta quy ước tính góc theo đơn vị độ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



Giải

Hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có các vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{u'} = (2; 2; 1)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left|\cos(\vec{u}, \vec{u'})\right| = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Vậy $(\Delta, \Delta') \approx 19{,}5°$.

Luyện tập 1. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

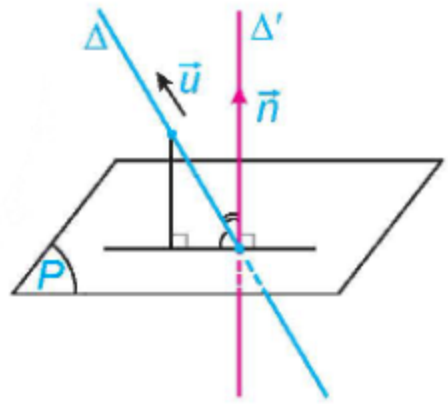
2. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

HĐ2. Tìm mối quan hệ của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng với góc giữa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến tương ứng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Xét $\vec{u} = (a; b; c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ và $\vec{n} = (A; B; C)$ (với giá Δ') là một vectơ pháp tuyến của (P). (H.5.35)

a) Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc $(\Delta, (P))$ và (Δ, Δ').

b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa $\sin(\Delta, \Delta')$ và $\left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right|$?



Hình 5.35

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

$$\sin(\Delta, (P)) = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, tính góc tạo bởi trục Ox và mặt phẳng $(P): \sqrt{2}x - y + z + 2 = 0$.

Giải

Trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\sqrt{2}; -1; 1)$.
Ta có:

$$\sin(Ox, (P)) = \frac{|1 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy Ox tạo với (P) góc $45°$.

Luyện tập 2. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P), với:

$$\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{1}, \ (P): x - y + z - 1 = 0.$$

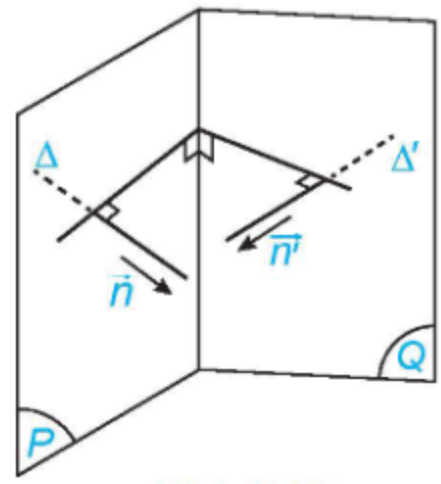
3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

HĐ3. Tìm mối quan hệ của góc giữa hai mặt phẳng và góc giữa hai vectơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A'; B'; C')$. Lấy các đường thẳng Δ, Δ' tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{n}$, $\vec{n'}$. (H.5.36)

a) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) và góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' có mối quan hệ gì?

b) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 5.36

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n'} = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q), kí hiệu là $((P), (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos\big((P), (Q)\big) = \big|\cos(\vec{n}, \vec{n'})\big| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 1 = 0$ và $(Q) : x + y - z + 1 = 0$.

Giải

Các mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 2)$, $\vec{n'} = (1; 1; -1)$.

Ta có: $\cos\big((P), (Q)\big) = \dfrac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Do đó $((P), (Q)) \approx 78{,}9°$.

Luyện tập 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P) : x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ và $(Oxz) : y = 0$.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 4)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(3; 0; 0)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD).

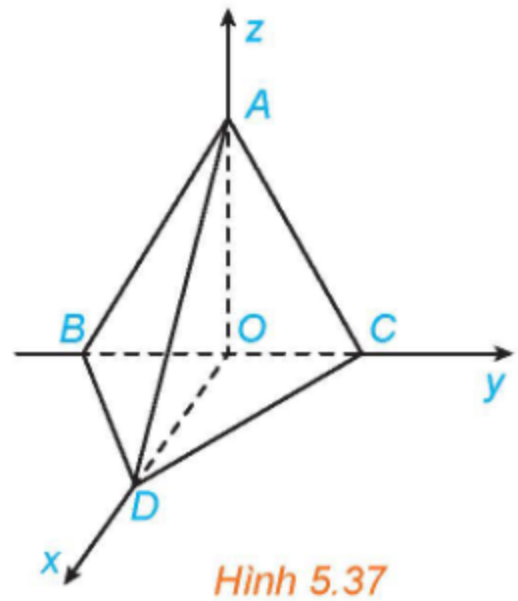
Giải (H.5.37)

Mặt phẳng (ABD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BD} = (3; 3; 0)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$.

Suy ra (ABD) có vectơ pháp tuyến $\big[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}\big] = (-12; 12; -9)$.

Do đó $\vec{n} = (-4; 4; -3)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (ABD).

Mặt phẳng (ACD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (0; 3; -4)$ và $\overrightarrow{AD} = (3; 0; -4)$. Suy ra (ACD) có vectơ pháp tuyến là $\big[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\big] = (-12; -12; -9)$. Do đó $\vec{m} = (4; 4; 3)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (ACD).



Hình 5.37

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD). Khi đó:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{m}\right)\right| = \frac{\left|-4\cdot 4 + 4\cdot 4 + (-3)\cdot 3\right|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{9}{41}.$$

Vậy $\varphi \approx 77{,}3°$.

Vận dụng. Hãy trả lời câu hỏi đã được nêu ra trong *tình huống mở đầu*.

BÀI TẬP

5.20. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{x+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

5.21. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z - 1 = 0$.

5.22. Tính góc giữa đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 3 = 0$.

5.23. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo *britannica.com*) (H.5.38). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

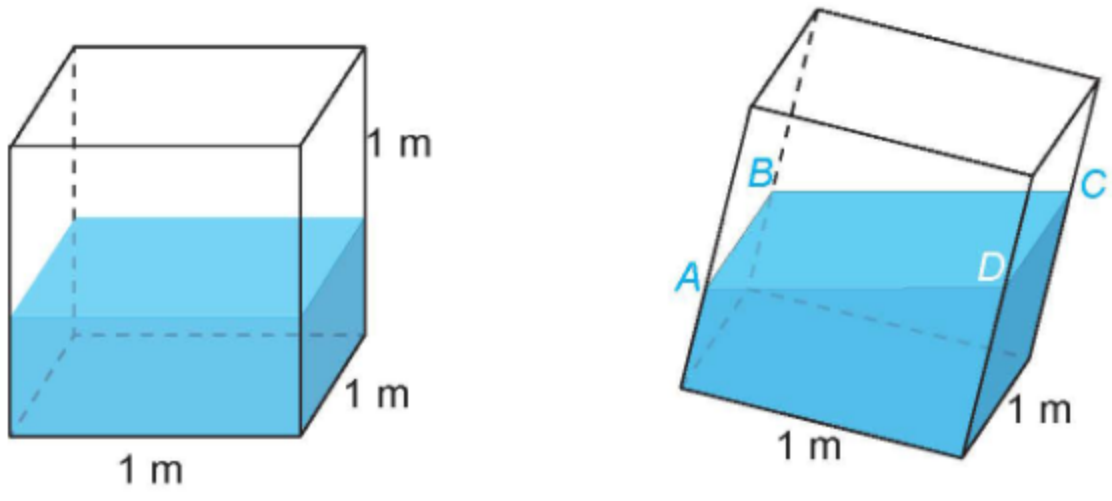


Hình 5.38. Kim tự tháp Kheops

5.24. (H.5.39) Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 40 cm, 44 cm, 48 cm.

a) Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể bằng bao nhiêu centimét? (Tính gần đúng, lấy giá trị nguyên.)

b) Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?



Hình 5.39

Bài 17

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

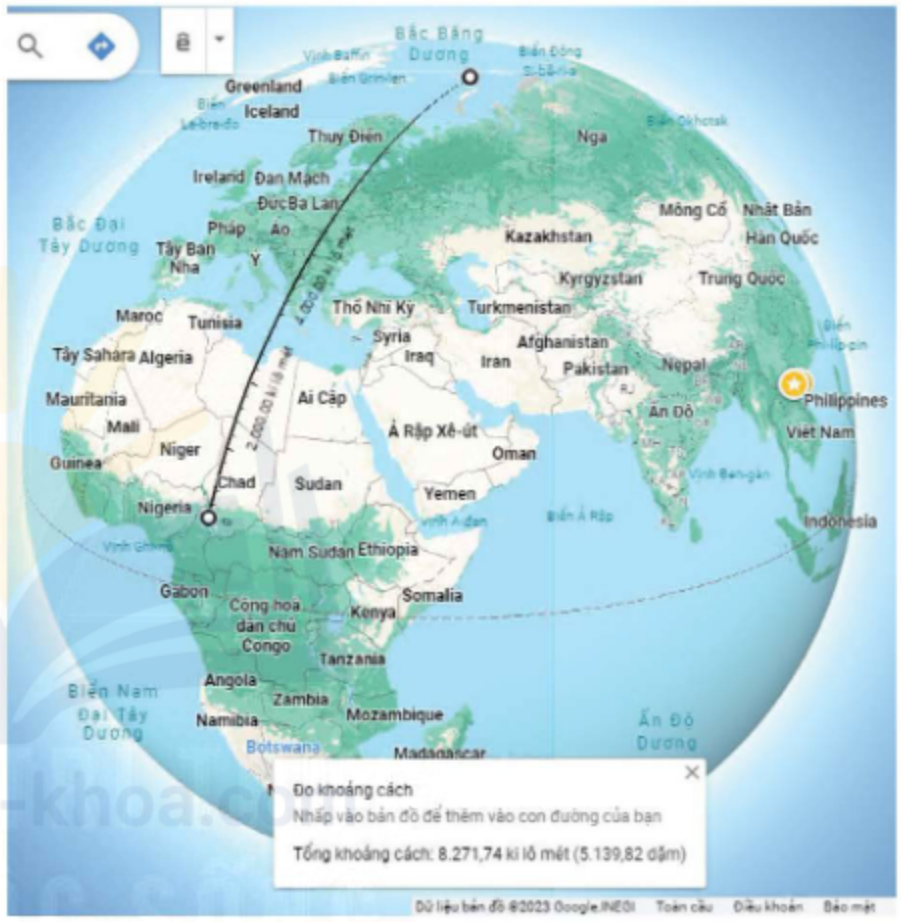
THUẬT NGỮ

- Phương trình mặt cầu
- Tâm và bán kính của mặt cầu

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết phương trình mặt cầu.
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu khi biết phương trình.
- Lập phương trình mặt cầu khi biết tâm và bán kính.
- Vận dụng kiến thức về phương trình mặt cầu để giải quyết một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Bằng ứng dụng Google Maps, thực hiện phép đo khoảng cách trên bề mặt Trái Đất từ vị trí $10°N, 15°E$ đến vị trí $80°N, 70°E$ ta sẽ được khoảng cách 8271,74 km (H.5.40). Cơ sở toán học cho việc thiết lập phần mềm tính công thức khoảng cách trên bề mặt Trái Đất là gì?



Hình 5.40. Đo khoảng cách trên bề mặt Trái Đất bằng Google Maps

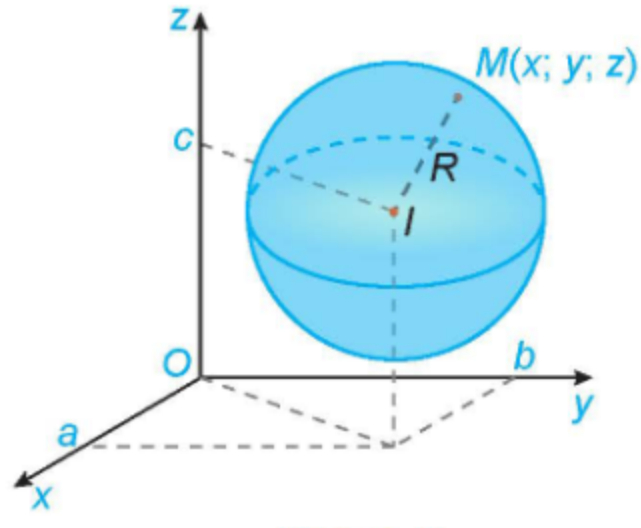
1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Mặt cầu tâm I bán kính R ($R > 0$) là tập các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R.

Một điểm M được gọi là nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R nếu $IM < R$ và được gọi là nằm ngoài mặt cầu đó nếu $IM > R$. Mỗi đường thẳng đi qua tâm mặt cầu đều cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt, đoạn thẳng nối hai điểm đó được gọi là một đường kính của mặt cầu. Mỗi đường kính của mặt cầu đều có trung điểm là tâm mặt cầu và có độ dài bằng hai lần bán kính mặt cầu.

HĐ. Tìm phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R (H.5.41). Khi đó, một điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt cầu (S) khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn điều kiện gì?



Hình 5.41

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Chú ý

– Điểm $M(x; y; z)$ nằm trong mặt cầu (S) nếu

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<R^2.$$

– Điểm $M(x; y; z)$ nằm ngoài mặt cầu (S) nếu

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>R^2.$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$.

a) Xác định tâm và bán kính của (S).

b) Hỏi gốc toạ độ $O(0; 0; 0)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S)?

Giải

a) Ta viết lại phương trình của mặt cầu (S) dưới dạng: $(x-1)^2+[y-(-3)]^2+(z-0)^2=(\sqrt{5})^2$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 0)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

b) Ta có $OI^2=(0-1)^2+(0+3)^2+(0-0)^2=10>5=R^2$. Do đó, gốc toạ độ $O(0; 0; 0)$ nằm ngoài mặt cầu (S).

Luyện tập 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x+2)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

a) Xác định tâm và bán kính của (S).

b) Hỏi điểm $M(2; 0; 1)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S)?

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a) Tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; -3\right)$, bán kính $R=\frac{9}{4}$.

b) Đường kính AB, với $A(1; 2; 1)$ và $B(3; 1; 5)$.

Giải

a) Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; -3\right)$ và có bán kính $R=\frac{9}{4}$ nên có phương trình:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-0)^2+(z+3)^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2 \text{ hay } (S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+3)^2=\frac{81}{16}.$$

b) Đoạn thẳng AB có trung điểm là $J\left(2; \frac{3}{2}; 3\right)$.

Mặt cầu (S) có tâm J và bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(5-1)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Do đó $(S):(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-3)^2=\frac{21}{4}$.

Luyện tập 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a) Tâm là gốc toạ độ, bán kính $R=1$.

b) Đường kính AB, với $A(1; -1; 2)$, $B(2; -3; -1)$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho (S) là tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ thoả mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$

Chứng minh rằng (S) là một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$(S) : (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 16$$

hay

$$(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4^2.$$

Vậy (S) là mặt cầu có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 4$.

Luyện tập 3. Trong không gian $Oxyz$, cho (S) là tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ có toạ độ thoả mãn phương trình:

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Chứng minh rằng (S) là một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Nhận xét. Với a, b, c, d là các hằng số, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có thể viết lại thành $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$ và là phương trình của một mặt cầu (S) khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Khi đó, (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ứng với phương trình đó.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 8z + 100 = 0.$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5y - 2z - \frac{3}{4} = 0.$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 6y - 9z + 10 = 0.$

Giải

a) Phương trình đã cho tương ứng với $a = 1, b = -\frac{3}{2}, c = 4, d = 100$. Trong trường hợp này, $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \frac{9}{4} + 16 - 100 < 0$. Do đó phương trình đã cho không phải là phương trình của một mặt cầu.

b) Phương trình đã cho tương ứng với $a = 2, b = -\frac{5}{2}, c = 1, d = -\frac{3}{4}$. Trong trường hợp này, $a^2 + b^2 + c^2 - d = 4 + \frac{25}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 12 > 0$. Do đó phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I\left(2; -\frac{5}{2}; 1\right)$ và bán kính $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

c) Phương trình đã cho không phải là phương trình của một mặt cầu vì xuất hiện $-2xy$ trong phương trình.

Luyện tập 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình:

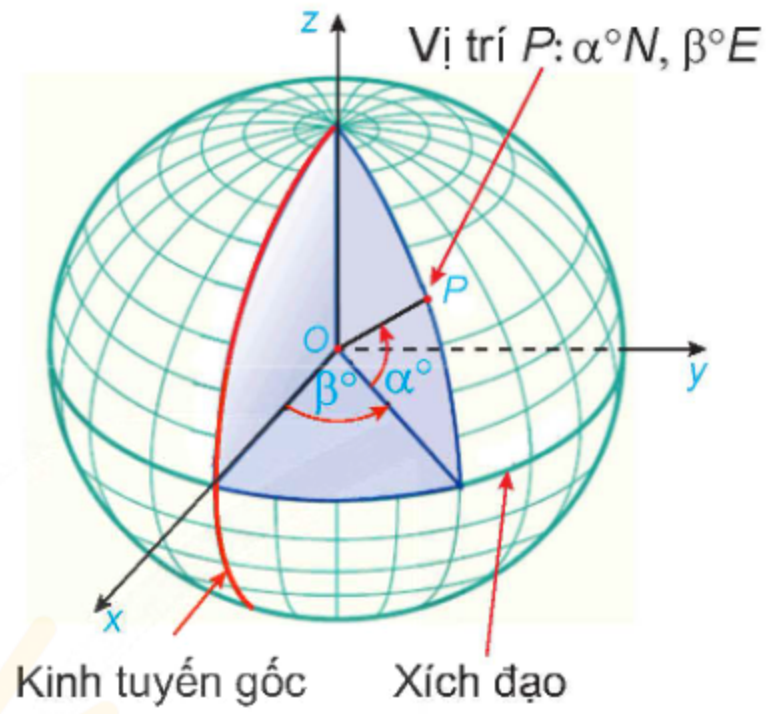
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 5y + 6z + \frac{25}{4} = 0.$$

Xác định tâm và bán kính của (S).

sách-giáo-khoa.com

2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

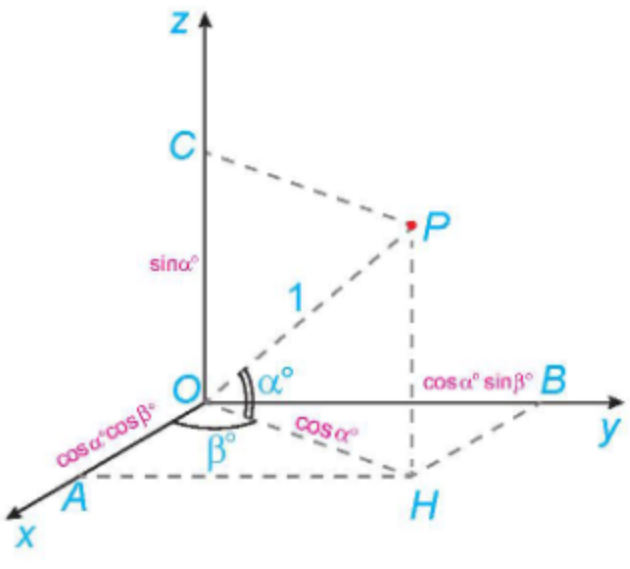
Trong mô hình toán học, bề mặt Trái Đất là mặt cầu với bán kính 6 371 km (theo: *science.nasa.gov/earth/facts/*). Mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn có đường kính là trục của Trái Đất (đoạn thẳng nối cực Bắc N và cực Nam S). Kinh tuyến gốc là kinh tuyến đi qua Đài Thiên văn Greenwich ở London. Mặt phẳng chứa kinh tuyến gốc chia Trái Đất làm hai nửa là bán cầu Đông và bán cầu Tây, nước ta nằm ở bán cầu Đông. Kinh độ của một điểm P trên bề mặt Trái Đất là số đo của góc nhị diện có hai mặt tương ứng chứa kinh tuyến gốc và kinh tuyến đi qua P (cạnh của góc nhị diện này là đường thẳng chứa trục Trái Đất). Kinh độ nhận giá trị trong đoạn từ $0°$ đến $180°$. Vĩ độ của điểm P là số đo của góc giữa mặt phẳng chứa đường xích đạo và đường thẳng đi qua P và tâm O của Trái Đất. Vĩ độ nhận giá trị trong đoạn từ $0°$ đến $90°$. Mỗi điểm trên bề mặt Trái Đất thuộc một trong hai bán cầu Bắc hoặc Nam và thuộc một trong hai bán cầu Đông hoặc Tây. Vì vậy, đi kèm với vĩ độ, còn có chữ E hoặc W nếu vị trí đó tương ứng thuộc bán cầu Đông hay bán cầu Tây và có chữ N, S nếu vị trí đó tương ứng ở bán cầu Bắc hay bán cầu Nam (Hình 5.42). Chẳng hạn, hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí: $21°01'51''N, 105°51'09''E$ (theo: *maps.google.com*). Vị trí trên mặt đất hoàn toàn xác định khi biết vĩ độ và kinh độ (bao gồm cả các kí hiệu N, S, E, W).



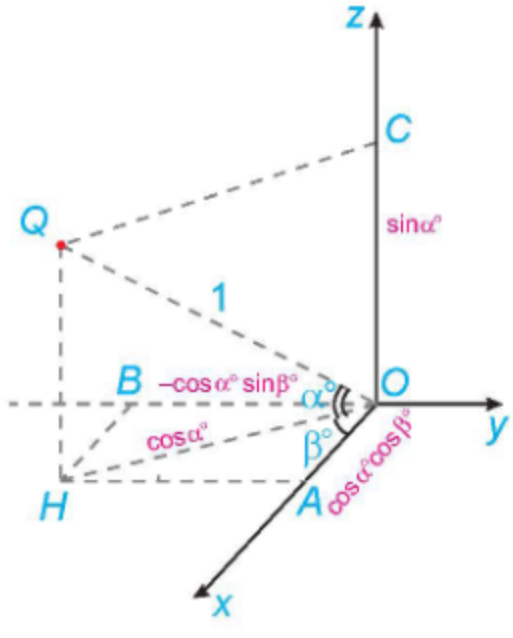
Hình 5.42

Trong bài học này, ta xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N, tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trên thực tế. Như vậy, trong không gian $Oxyz$, bề mặt Trái Đất có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Nếu biết vĩ độ và kinh độ của một vị trí trên mặt đất thì toạ độ của nó trong không gian cũng dễ dàng được xác định và ngược lại. Chẳng hạn, vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha°N, \beta°E\ (0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180)$ có toạ độ $P(\cos\alpha°\cos\beta°; \cos\alpha°\sin\beta°; \sin\alpha°)$(H.5.43), vị trí Q có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha°N, \beta°W\ (0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180)$ thì có toạ độ $Q(\cos\alpha°\cos\beta°; -\cos\alpha°\sin\beta°; \sin\alpha°)$(H.5.44).



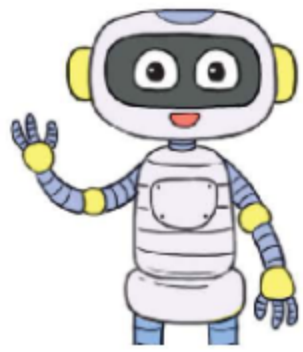
Hình 5.43



Hình 5.44

Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q. Cung tròn nói trên là đường đi ngắn nhất trên bề mặt Trái Đất từ P đến Q. Trong ví dụ sau đây, ta sẽ tính khoảng cách giữa hai vị trí đã được nêu ra trong mở đầu bài học.

Quy ước: Trong phần này, kết quả phép tính được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư sau dấu phẩy.



Ví dụ 5. Biết rằng nếu vị trí M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha°N$, $\beta°E$ $(0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 90)$ thì có toạ độ $M(\cos\alpha°\cos\beta°; \cos\alpha°\sin\beta°; \sin\alpha°)$. Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí P: $10°N$, $15°E$ đến vị trí Q: $80°N$, $70°E$.

Giải

Ta có

$$P(\cos10°\cos15°;\cos10°\sin15°;\sin10°),\ Q(\cos80°\cos70°;\cos80°\sin70°;\sin80°).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OP} = (\cos10°\cos15°;\cos10°\sin15°;\sin10°),\ \overrightarrow{OQ} = (\cos80°\cos70°;\cos80°\sin70°;\sin80°).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} &= \cos10°\cos15°\cos80°\cos70° + \cos10°\sin15°\cos80°\sin70° + \sin10°\sin80°\\ &\approx 0,2691.\end{aligned}$$

Vì P, Q thuộc mặt đất nên $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$.

Do đó $\cos\widehat{POQ} = \dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|} \approx 0,2691$. Suy ra $\widehat{POQ} \approx 74,3893°$.

Mặt khác, đường tròn tâm O, đi qua P, Q có bán kính 1 và chu vi là $2\pi \approx 6,2832$, nên cung nhỏ $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đó có độ dài xấp xỉ bằng $\dfrac{74,3893}{360}\cdot 6,2832 \approx 1,2983$.

Do 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trên thực tế, nên khoảng cách trên mặt đất giữa hai vị trí P, Q xấp xỉ bằng $1,2983\cdot 6371 = 8271,4693$ (km).

Luyện tập 5. Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí A là giao giữa kinh tuyến gốc với xích đạo đến vị trí B: $45°N$, $30°E$.

Trải nghiệm. Trên Google Maps, thực hiện phép đo khoảng cách từ vị trí $0°N$, $0°E$ đến vị trí $45°N$, $30°E$ và so sánh với kết quả tính được ở Luyện tập 5.

sach-giao-khoa.com

BÀI TẬP

5.25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=9$. Xác định tâm và bán kính của (S).

5.26. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 0; 5)$ và bán kính $R=2$.

5.27. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(0; 3; -1)$ và có bán kính bằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 3x+2y-z=0$.

5.28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$. Xác định tâm và bán kính của (S).

5.29. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ứng với phương trình đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$;

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$;

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.

5.30. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2; 0; 0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2; 1; 1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

Em có biết?

Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) được vận hành bởi chính phủ Hoa Kỳ, bất kì ai có thiết bị thu GPS đều có thể truy cập để sử dụng miễn phí.

GPS hoạt động bằng cách truyền tín hiệu từ mạng lưới các vệ tinh quay quanh Trái Đất đến thiết bị thu GPS trên mặt đất. Bộ thu GPS sử dụng tín hiệu nhận được để xác định khoảng cách từ thiết bị đó đến các vệ tinh. Khoảng cách được xác định thông qua thời gian truyền tin và vận tốc tín hiệu. Vận tốc tín hiệu bằng vận tốc ánh sáng, do đó, vấn đề quan trọng nhất còn lại là xác định được chính xác thời gian truyền tín hiệu. Mỗi vệ tinh GPS có một đồng hồ nguyên tử (loại đồng hồ đo thời gian chính xác nhất hiện nay) được sử dụng để đo thời gian cần thiết để tín hiệu GPS truyền từ vệ tinh đến máy thu. Bộ thu GPS cũng có đồng hồ đo thời gian. Việc đồng bộ hoá đồng hồ giữa nơi phát và nơi thu có ảnh hưởng tới tính chính xác của phép đo.



Các vệ tinh GPS bay theo các quỹ đạo xác định, quanh Trái Đất, hai vòng mỗi ngày và ở độ cao khoảng 20 200 km so với mặt đất. Do vậy, tại mỗi thời điểm, người ta luôn biết được vị trí của mỗi vệ tinh.

Tính đến năm 2023, có 31 vệ tinh trong hệ thống GPS và có hơn 20 vệ tinh trong số đó đang hoạt động. Nhìn chung, để xác định vị trí của thiết bị trên mặt đất, cần tới thông tin khoảng cách từ thiết bị đó đến 3 vệ tinh. Tại những thời điểm mà các vệ tinh ở vị trí đặc biệt thì số vệ tinh cần thiết có thể ít hơn hoặc nhiều hơn 3. Tuy vậy, càng đo được nhiều khoảng cách đến các vệ tinh, vị trí của thiết bị thu càng được xác định chính xác. Quỹ đạo của các vệ tinh được sắp xếp sao cho tại mỗi thời điểm, mỗi vị trí trên mặt đất đều có thể nhìn thấy ít nhất 4 vệ tinh trong số các vệ tinh đang hoạt động (và vì vậy, thiết bị có thể nhận được tín hiệu từ các vệ tinh đó).

(Theo: *nist.gov* và *globalgpssystems.com*)

Toán học cho phép thiết lập công thức xác định vị trí của thiết bị theo vị trí của các vệ tinh và khoảng cách tương ứng, nhờ đó có thể lập trình tính toán xác định vị trí của thiết bị. Ta hãy xét một trường hợp cụ thể sau đây:

Trong không gian $Oxyz$, giả sử tại một thời điểm, một thiết bị GPS xác định được khoảng cách từ nó tới ba vệ tinh A, B, C tương ứng là $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 2. Tại thời điểm đó, các vệ tinh trên ở vị trí có toạ độ tương ứng là $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C\left(0;\frac{11}{4};\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$. Từ thông tin trên, ta hoàn toàn có thể xác định toạ độ cũng như vĩ độ và kinh độ của vị trí thiết bị GPS.

- Giả sử tại thời điểm đã cho, thiết bị GPS ở vị trí $P(x;y;z)$.

  Do thiết bị thuộc mặt đất và $PA = \sqrt{5}$ nên

  $$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (1) \text{ và } (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 5 \ (2).$$

  Trừ vế theo vế của (1) và (2), ta được $4x - 4 = -4$. Vậy $x = 0$.

  Do $PB = \sqrt{2}$ nên $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 2 \ (3)$.

  Trừ vế theo vế của (1) và (3), ta được $4y - 4 = -1$. Vậy $y = \frac{3}{4}$.

  Thay $x = 0$, $y = \frac{3}{4}$ vào phương trình (1), ta được $0^2 + \frac{9}{16} + z^2 = 1$.

  Suy ra $z = \frac{\sqrt{7}}{4}$ hoặc $z = \frac{-\sqrt{7}}{4}$. Kiểm tra điều kiện $PC = 2$, ta thấy chỉ có điểm $P\left(0;\frac{3}{4};\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ thoả mãn.

- Vị trí P của GPS có tung độ dương nên thuộc bán cầu Đông và có cao độ dương nên thuộc bán cầu Bắc. Gọi vĩ độ, kinh độ của P tương ứng là $\alpha°N$, $\beta°E$ $(0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180)$. Khi đó $P(\cos\alpha°\cos\beta°; \cos\alpha°\sin\beta°; \sin\alpha°)$.

  Mặt khác, ta có $P\left(0;\frac{3}{4};\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ nên $\sin\alpha° = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Do đó $\alpha \approx 41{,}4096$.

  Ta có $\cos\alpha° \neq 0$ và $\cos\alpha°\cos\beta° = 0$ nên $\cos\beta° = 0$.

  Vậy $\beta = 90$ và do đó vị trí của GPS (xấp xỉ) là $41{,}4096°N$, $90°E$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A – TRẮC NGHIỆM

5.31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-3z+1=0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có toạ độ là

A. $(1;2;3)$. B. $(1;-2;3)$. C. $(1;2;-3)$. D. $(1;-2;-3)$.

5.32. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1;-1;2)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(2;1;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến là

A. $x-y+2z+1=0$. B. $x-y+2z-6=0$.

C. $2x+y-z-1=0$. D. $2x+y-z+1=0$.

5.33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có toạ độ là

A. $(1;-2;3)$. B. $(2;1;-2)$. C. $(2;1;2)$. D. $(1;2;3)$.

5.34. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=3-t \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có toạ độ là

A. $(1;-2;3)$. B. $(2;0;0)$. C. $(2;1;-1)$. D. $(2;1;1)$.

5.35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2;-1;1)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(1;2;-3)$ làm một vectơ chỉ phương là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$. B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$.

5.36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;-1)$, $B(2;1;1)$. Phương trình đường thẳng AB là

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=1+2t. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=-1+2t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1+2t. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=t \\ z=-1+2t. \end{cases}$

5.37. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y+z-3=0$ là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. D. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

5.38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(1; 0; 3), R = 4$.
B. $I(1; 0; 3), R = 2$.
C. $I(-1; 0; 3), R = 2$.
D. $I(-1; 0; 3), R = 4$.

5.39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Toạ độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) lần lượt là

A. $I(1; -2; -1), R = 3$.
B. $I(1; 2; 1), R = 9$.
C. $I(1; 2; 1), R = 3$.
D. $I(1; -2; -1), R = 9$.

B – TỰ LUẬN

5.40. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; -2; 3)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình đường thẳng AC.

c) Viết phương trình mặt cầu đường kính AC.

d) Viết phương trình mặt cầu có tâm A và đi qua B.

5.41. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và gốc toạ độ O.

5.42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 1; 0)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

5.43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$, $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d'.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với đường thẳng d.

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d.

d) Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxz).

5.44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

sách-giáo-khoa.com

5.45. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} \text{ và } d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với đường thẳng d'.

5.46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$, $(Q): 2x+y-z-2=0$ và điểm $A(-1; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm A đồng thời vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

5.47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{-2}$ và $d': \begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = 2t. \end{cases}$

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d'.

b) Tính góc giữa d và d'.

5.48. Trong không gian $Oxyz$, tính góc tạo bởi đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-2z+3=0$.

5.49. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và mặt phẳng (Oxy).

5.50. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

5.51. Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục toạ độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng (Oxy), đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(5; 6; -2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

5.52. Nếu đứng trước biển và nhìn ra xa, người ta sẽ thấy một đường giao giữa mặt biển và bầu trời, đó là đường chân trời đối với người quan sát (H.5.45a). Về mặt Vật lí, đường chân trời là đường giới hạn phần Trái Đất mà người quan sát có thể nhìn thấy được (phần còn lại bị chính Trái Đất che khuất). Ta có thể hình dung rằng, nếu người quan sát ở tại đỉnh của một chiếc nón và Trái Đất được "thả" vào trong chiếc nón đó, thì đường chân trời trong trường hợp này là đường chạm giữa Trái Đất và chiếc nón (H.5.45b). Trong mô hình toán học, đường chân trời đối với người quan sát tại vị trí B là tập hợp những điểm A nằm trên bề mặt Trái Đất sao cho $\widehat{BAO} = 90°$, với O là tâm Trái Đất (H.5.45c). Trong không gian $Oxyz$, giả sử bề mặt Trái Đất (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$ và người quan sát ở vị trí $B(1;1;-1)$.

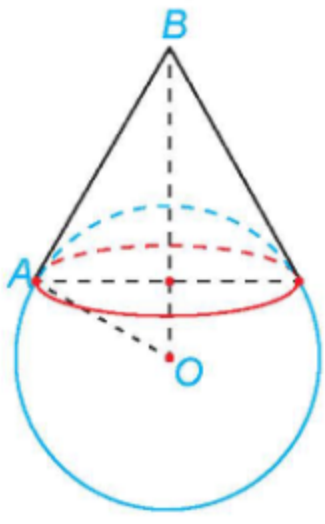
Gọi A là một vị trí bất kì trên đường chân trời đối với người quan sát ở vị trí B. Tính khoảng cách AB.



a)



b)

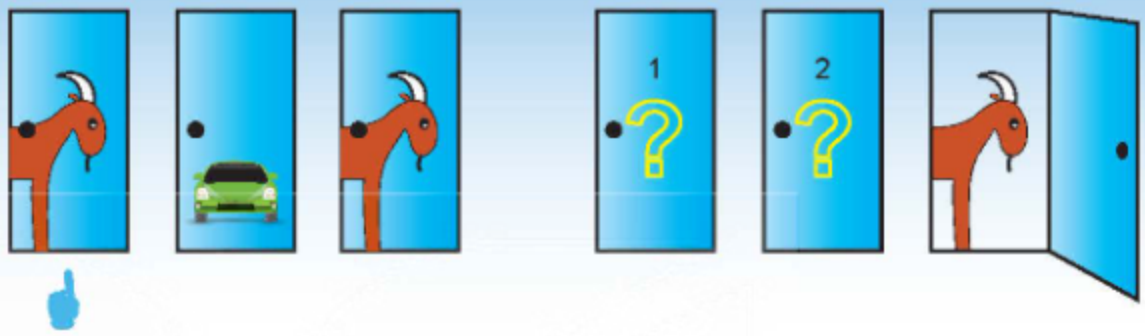


c)

Hình 5.45

CHƯƠNG VI
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Nội dung của chương bao gồm khái niệm xác suất có điều kiện và một số công thức có liên quan (công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes). Xác suất có điều kiện là một chủ đề có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.



Bài 18 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

THUẬT NGỮ

- Xác suất có điều kiện
- Công thức nhân xác suất
- Bảng dữ liệu thống kê 2×2

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm về xác suất có điều kiện.
- Nhận biết mối liên hệ giữa xác suất có điều kiện và xác suất.
- Vận dụng công thức nhân xác suất cho hai biến cố bất kì.
- Giải thích ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong một số tình huống thực tế.

Ô cửa bí mật (Let's Make a Deal) là một trò chơi trên truyền hình nổi tiếng ở Mỹ, đã được mua bản quyền và phát sóng ở nhiều nước trên thế giới. Nội dung trò chơi như sau:

• Người chơi được mời lên sân khấu và đứng trước ba cánh cửa đóng kín. Sau một cánh cửa có chiếc ô tô, sau mỗi cánh cửa còn lại là một con lừa. Người chơi được yêu cầu chọn ngẫu nhiên một cánh cửa, nhưng không được mở ra.

• Tiếp đó người quản trò tuyên bố sẽ mở ngẫu nhiên một trong hai cánh cửa người chơi không chọn mà sau cửa đó là con lừa. Người quản trò hỏi người chơi muốn giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu của mình hay muốn chuyển sang cửa chưa mở còn lại.

Các kiến thức trong bài học này sẽ giúp ta cho người chơi lời khuyên.

1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Trong thực tế, ta thường cập nhật xác suất của một biến cố khi biết thêm một thông tin nào đó. Chẳng hạn:

- Tính xác suất để ngày mai mưa nếu hôm nay không mưa;
- Tính xác suất để bạn An là học sinh giỏi môn Toán nếu biết rằng An là một học sinh giỏi môn Tin;
- Tính xác suất để một người thọ 80 tuổi nếu người đó đã sống đến 60 tuổi. (Các công ty bảo hiểm rất quan tâm đến xác suất này).

HĐ1. Hình thành khái niệm xác suất có điều kiện

Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi trong hộp, không trả lại. Sau đó Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Tùng lấy được bút bi xanh nếu biết rằng Sơn đã lấy được bút bi đen.

Ta có định nghĩa sau:

> Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A, được tính khi biết biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A \mid B)$.

Xác suất có điều kiện có thể được tính theo công thức sau:

> Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B) > 0$. Khi đó
> $$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ví dụ 1. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố: "Bình lấy được viên bi trắng".

Tính $P(A \mid B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $P(A \mid B)$ ở trên.

Giải

Cách 1: Bằng định nghĩa

Nếu B xảy ra tức là Bình lấy được viên bi trắng. Khi đó, trong hộp còn lại 29 viên bi với 19 viên bi trắng và 10 viên bi đen. Vậy $P(A \mid B) = \frac{19}{29}$.

Cách 2: Bằng công thức

Bình có 30 cách chọn, An có 29 cách chọn một viên bi trong hộp. Do đó $n(\Omega) = 30 \cdot 29$.

Bình có 20 cách chọn một viên bi trắng, An có 29 cách chọn từ 29 viên bi còn lại.

Do đó $n(B) = 20 \cdot 29$ và $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$.

AB là biến cố "Bình và An cùng lấy được viên bi trắng". Bình có 20 cách chọn một viên bi trắng, An có 19 cách chọn một viên bi trắng trong 19 viên bi trắng còn lại.

Do đó $n(AB) = 20 \cdot 19$ và $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)}$.

Vậy $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{20 \cdot 19}{20 \cdot 29} = \frac{19}{29}$.

Luyện tập 1. Trở lại Ví dụ 1. Tính $P\left(A \mid \overline{B}\right)$ bằng định nghĩa và bằng công thức.

Ví dụ 2

a) Từ công thức tính $P(A \mid B)$ ở trên, chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = P(A)$ và $P(B \mid A) = P(B)$.

b) Từ định nghĩa xác suất có điều kiện và định nghĩa về tính độc lập của hai biến cố, hãy chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A \mid B) = P(A)$ và $P(B \mid A) = P(B)$.

Giải

a) Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Vậy với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A);$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

b) Theo định nghĩa, $P(A \mid B)$ là xác suất của A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra. Vì A, B độc lập nên việc xảy ra B không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của A. Do đó:

$$P(A \mid B) = P(A).$$

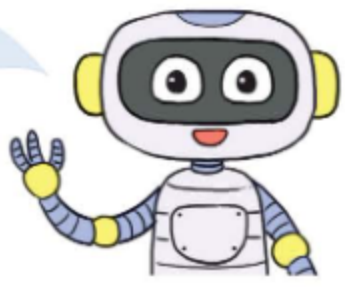
Tương tự, $P(B \mid A)$ là xác suất của B, tính trong điều kiện biết rằng biến cố A đã xảy ra. Vì A, B độc lập nên việc xảy ra A không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của B. Do đó:

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Luyện tập 2. Chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì:

$$P\left(\overline{A} \mid B\right) = P\left(\overline{A}\right) \text{ và } P\left(A \mid \overline{B}\right) = P(A).$$

Sử dụng tính chất đã học ở lớp 11: Nếu cặp biến cố A và B độc lập thì các cặp biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ cũng độc lập.



Ví dụ 3. (*Bảng dữ liệu thống kê 2 × 2*) Một viện nghiên cứu về an toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Giả sử viện đã xem xét 577 006 vụ tai nạn giao thông ô tô và việc thắt dây an toàn của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Kết quả cho thấy:

- Trong số những người lái xe có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong và 412 368 người sống sót;
- Trong số những người lái xe không thắt dây an toàn, có 1 601 người tử vong và 162 527 người sống sót.

Kết quả trên được trình bày dưới dạng bảng gồm 2 dòng và 2 cột như dưới đây, được gọi là bảng dữ liệu thống kê 2 × 2:

Thắt dây an toàn \ Kết quả	Tử vong	Sống sót
Không	1 601	162 527
Có	510	412 368

Chọn ngẫu nhiên một người lái xe trong số 577 006 người bị tai nạn giao thông.

a) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp có thắt dây an toàn.

c) So sánh hai xác suất ở câu a và câu b rồi rút ra kết luận.

Giải

a) Không gian mẫu Ω là tập hợp gồm 577 006 người lái xe xảy ra tai nạn giao thông

$\Rightarrow n(\Omega) = 577\ 006$.

Gọi A là biến cố: "Người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông";

B là biến cố: "Người lái xe đó không thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Khi đó AB là biến cố: "Người lái xe đó tử vong và không thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Ta cần tính $P(A \mid B)$.

Ta có $162\ 527 + 1\ 601 = 164\ 128$ người không thắt dây an toàn $\Rightarrow n(B) = 164\ 128$.

Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{164\ 128}{577\ 006}$.

Trong số những người không thắt dây an toàn, có 1 601 người tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông $\Rightarrow n(AB) = 1\ 601$. Vậy $P(AB) = \dfrac{n(AB)}{n(\Omega)} = \dfrac{1\ 601}{577\ 006}$.

Do đó $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{1\ 601}{164\ 128} \approx 9{,}755 \cdot 10^{3} = 0{,}009755$.

b) Ta cần tính $P\left(A \mid \overline{B}\right)$.

$\overline{B}$ là biến cố: "Người lái xe đó có thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

$A\overline{B}$ là biến cố: "Người lái xe đó tử vong và có thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Ta có $412\ 368 + 510 = 412\ 878$ người lái xe có thắt dây an toàn $\Rightarrow n(\overline{B}) = 412\ 878$.

Trong số những người có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông $\Rightarrow n(A\overline{B}) = 510$.

Tương tự như trên, ta có:

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{n\left(A\overline{B}\right)}{n\left(\overline{B}\right)} = \frac{510}{412\ 878.} \approx 1{,}235 \cdot 10^{-3} = 0{,}001235.$$

c) Ta có:

$$\frac{P(A \mid B)}{P(A \mid \overline{B})} \approx \frac{9{,}755 \cdot 10^{-3}}{1{,}235 \cdot 10^{-3}} \approx 7{,}9 \Rightarrow P\left(A \mid B\right) \approx 7{,}9 \cdot P\left(A \mid \overline{B}\right).$$

Như vậy, xác suất để một người lái xe không thắt dây an toàn bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông cao gấp khoảng 7,9 lần xác suất để một người lái xe thắt dây an toàn bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông. Tức là, không thắt dây an toàn làm tăng nguy cơ bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông của người lái xe lên gấp khoảng 7,9 lần.

sách-giáo-khoa.com

Luyện tập 3. Một công ty dược phẩm muốn so sánh tác dụng điều trị bệnh X của hai loại thuốc M và N. Công ty đã tiến hành thử nghiệm với 4 000 bệnh nhân mắc bệnh X trong đó 2 400 bệnh nhân dùng thuốc M, 1 600 bệnh nhân còn lại dùng thuốc N. Kết quả được cho trong bảng dữ liệu thống kê 2 × 2 như sau:

Kết quả \ Uống thuốc	M	N
Khỏi bệnh	1 600	1 200
Không khỏi bệnh	800	400

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong số 4 000 bệnh nhân thử nghiệm sau khi uống thuốc. Tính xác suất để bệnh nhân đó

a) uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh;

b) uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh.

2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

HĐ2. Hình thành công thức nhân xác suất

Chứng minh rằng, với hai biến cố A và B, $P(B) > 0$, ta có:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Chú ý. Nếu $P(B) = 0$ thì $P(AB) = 0$ nên công thức tính $P(AB)$ ở trên đúng với mọi biến cố A, B.

Vậy với hai biến cố A và B bất kì, ta có:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

Nhận xét. Vì $AB = BA$ nên với hai biến cố A và B bất kì, ta cũng có:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$



Ví dụ 4. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Sơn lấy được bút bi đen và Tùng lấy được bút bi xanh.

Giải

Gọi A là biến cố: "Bạn Sơn lấy được bút bi đen";

B là biến cố: "Bạn Tùng lấy được bút bi xanh".

Ta cần tính $P(AB)$.

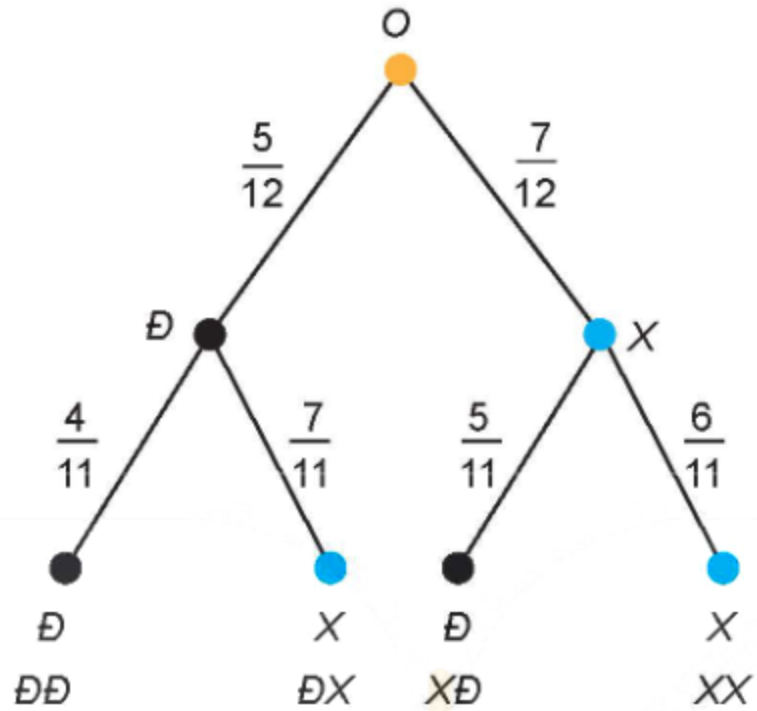
Vì $n(A) = 5$ nên $P(A) = \frac{5}{12}$.

Nếu A xảy ra tức là bạn Sơn lấy được bút bi đen thì trong hộp có 11 bút bi với 7 bút bi xanh.

Vậy $P(B \mid A) = \frac{7}{11}$.

Theo công thức nhân xác suất: $P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$.

Một phương pháp mô tả trực quan lời giải trên là dùng *sơ đồ hình cây*.



Trên nhánh $O\text{Đ}$ và OX tương ứng ghi xác suất lấy được bút đen và bút xanh.

Trên nhánh ĐĐ, $\text{Đ}X$ tương ứng ghi xác suất lấy được bút đen, bút xanh với điều kiện đã lấy được bút đen.

Trên nhánh $X\text{Đ}$, XX tương ứng ghi xác suất lấy được bút đen, bút xanh với điều kiện đã lấy được bút xanh.

Vậy xác suất cần tính là: $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$.

sách-giáo-khoa.com

Luyện tập 4. Trở lại Ví dụ 4. Tính xác suất để:

a) Sơn lấy được bút bi xanh và Tùng lấy được bút bi đen;

b) Hai chiếc bút lấy ra có cùng màu.

Vận dụng. Trở lại trò chơi "Ô cửa bí mật" trong *tình huống mở đầu*. Giả sử người chơi chọn cửa số 1 và người quản trò mở cửa số 3.

Kí hiệu E_1; E_2; E_3 tương ứng là các biến cố: "Sau ô cửa số 1 có ô tô"; "Sau ô cửa số 2 có ô tô"; "Sau ô cửa số 3 có ô tô" và H là biến cố: "Người quản trò mở ô cửa số 3 thấy con lừa".

Sau khi người quản trò mở cánh cửa số 3 thấy con lừa, tức là khi H xảy ra. Để quyết định thay đổi lựa chọn hay không, người chơi cần so sánh hai xác suất có điều kiện: $P(E_1 \mid H)$ và $P(E_2 \mid H)$.

a) Chứng minh rằng:

- $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$;
- $P(H \mid E_1) = \frac{1}{2}$ và $P(H \mid E_2) = 1$.

b) Sử dụng công thức tính xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất, chứng minh rằng:

- $P(E_1 \mid H) = \dfrac{P(E_1) \cdot P(H \mid E_1)}{P(H)}$;
- $P(E_2 \mid H) = \dfrac{P(E_2) \cdot P(H \mid E_2)}{P(H)}$.

c) Từ các kết quả trên hãy suy ra:

$$P(E_2 \mid H) = 2P(E_1 \mid H).$$

Từ đó hãy đưa ra lời khuyên cho người chơi: Nên giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu hay chuyển sang cửa chưa mở còn lại?

Hướng dẫn: Nếu E_1 xảy ra, tức là sau cửa số 1 có ô tô. Khi đó, sau cửa số 2 và 3 là con lừa. Người quản trò chọn ngẫu nhiên một trong hai cửa số 2 và 3 để mở ra. Do đó, việc chọn cửa số 2 hay cửa số 3 có khả năng như nhau. Vậy $P(H \mid E_1) = \dfrac{1}{2}$.

Nếu E_2 xảy ra, tức là cửa số 2 có ô tô. Khi đó, người quản trò chắc chắn phải mở cửa số 3. Do đó $P(H \mid E_2) = 1$.

BÀI TẬP

6.1. Một hộp kín đựng 20 tấm thẻ giống hệt nhau đánh số từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ từ trong hộp. Người đó được thông báo rằng thẻ rút ra mang số chẵn. Tính xác suất để người đó rút được thẻ số 10.

6.2. Cho $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}51$; $P(B \mid A) = 0{,}8$. Tính $P(A \mid B)$.

6.3. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm;

b) Có ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7.

6.4. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đó không nhỏ hơn 10 nếu biết rằng có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm.

6.5. Bạn An phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,4. Tính xác suất để:

a) Cả hai thí nghiệm đều thành công;

b) Cả hai thí nghiệm đều không thành công;

c) Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

6.6. Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 cái kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên một cái kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm một cái kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai cái kẹo màu cam là $\dfrac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu cái kẹo?

Em có biết?

Công nghệ cập nhật Bayesian (Bayesian updating)

Giả sử khi nghiên cứu một vấn đề A, ban đầu ta đưa ra các kịch bản $E_1, E_2, \ldots, E_n$ về A với các xác suất xảy ra A là $P(E_1), \ldots, P(E_n)$. Các xác suất này thể hiện sự hiểu biết ban đầu của ta về A. Khi có thông tin mới H, ta cập nhật hiểu biết về A bằng cách tính các xác suất có điều kiện xảy ra A với điều kiện H: $P(E_1 \mid H), \ldots, P(E_n \mid H)$. Khi lại có thêm thông tin mới G, ta lại tiếp tục cập nhật hiểu biết của ta về A bằng cách tính các xác suất có điều kiện xảy ra A với điều kiện H, G: $P(E_1 \mid H,G), \ldots, P(E_n \mid H,G)$. Cứ như thế, sử dụng các thông tin mới, ta liên tục cập nhật các hiểu biết về A. Quy trình này được gọi là công nghệ cập nhật Bayesian (công nghệ Bayesian updating). Công nghệ Bayesian updating đã và đang được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của khoa học, kĩ thuật, y học, triết học,...

Một minh hoạ ấn tượng cho ứng dụng của công nghệ Bayesian updating là câu chuyện đội tìm kiếm cứu nạn của Mỹ tìm kiếm một người đánh cá bị mất tích khi rơi xuống biển (F.D. Flam, The Odds, Continually Updated*, The New York Times,* September, 29, 2014). Thông tin đầu tiên mà đội tìm kiếm nhận được là ông Aldridge bị rơi xuống biển trong khoảng từ 9 giờ tối ngày 27-7-2014 đến 6 giờ sáng ngày hôm sau. Những giờ sau đó, các thông tin mới do các trực thăng và tàu cứu hộ thu thập được tiếp tục được nạp vào máy tính. Sử dụng công nghệ Bayesian updating thông qua một phần mềm gọi là Sarops, máy tính đã liên tục cập nhật và định vị ngày càng chính xác khu vực mà người mất tích có khả năng đang ở đó. Sau 12 giờ đội tìm kiếm đã phát hiện được người đánh cá đang ôm phao trôi trên biển, gần kiệt sức nhưng vẫn còn sống.



Lực lượng bảo vệ bờ biển, được hướng dẫn bởi phương pháp thống kê của Thomas Bayes, đã có thể tìm thấy ngư dân mất tích John Aldridge.

Nguồn ảnh: Daniel Shea, nytimes.com.

Bài 19 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

THUẬT NGỮ

- Công thức xác suất toàn phần
- Sơ đồ hình cây
- Công thức Bayes

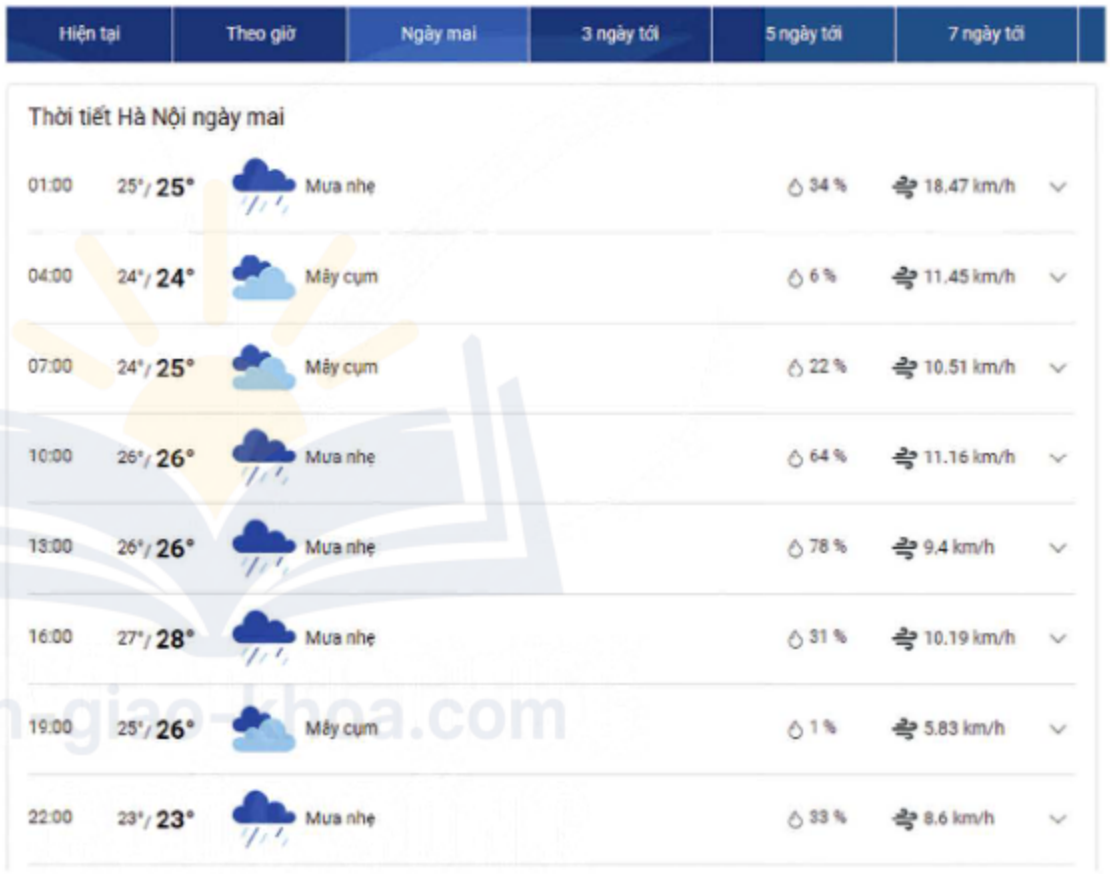
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả và biết vận dụng công thức xác suất toàn phần vào các tình huống có nội dung thực tiễn.
- Nắm được và biết vận dụng công thức Bayes vào các tình huống có nội dung thực tiễn.

1. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

Số khán giả đến xem buổi biểu diễn ca nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,9; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé chỉ là 0,4. Dự báo thời tiết cho thấy xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,75. Nhà tổ chức sự kiện quan tâm đến xác suất để bán được hết vé là bao nhiêu.

Công thức xác suất trong Mục 1 sẽ trả lời cho ta câu hỏi đó.



Hình 6.1. Minh hoạ về dự báo thời tiết (Ảnh: https://thoitiet.edu.vn/)

HĐ1. Hình thành công thức xác suất toàn phần

Gọi A là biến cố "Trời mưa" và B là biến cố "Bán hết vé" trong *tình huống mở đầu*.

a) Tính $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B \mid A)$, $P(B \mid \overline{A})$.

b) Trong hai xác suất $P(A)$ và $P(B)$, nhà tổ chức sự kiện quan tâm đến xác suất nào nhất?

Dựa trên các dữ kiện đã biết, có thể tính được $P(B)$ hay không? Công thức sau đây giúp ta trả lời cho câu hỏi này.

Cho hai biến cố A và B. Khi đó, ta có công thức sau:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}).$$

Công thức trên được gọi là công thức xác suất toàn phần.

sách giáo khoa.com

Ví dụ 1. Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy.

Giải

Gọi A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy"; B là biến cố: "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy". Ta cần tính $P(B)$. Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}).$$

- Tính $P(A)$: Vì thứ Hai, ông An đi làm bằng xe buýt nên xác suất để thứ Ba (hôm sau), ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Vậy $P(A) = 0,4$.
- Tính $P(\overline{A})$: Ta có $P(\overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- Tính $P(B \mid A)$: Đây là xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy.

  Theo giả thiết, nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7 và đi làm bằng xe máy là $1 - 0,7 = 0,3$. Do đó, nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy thì xác suất để thứ Tư, ông đi làm bằng xe máy là 0,3. Vậy $P(B \mid A) = 0,3$.
- Tính $P(B \mid \overline{A})$: Đây là xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt.

  Theo giả thiết, nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Do đó nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt thì xác suất để thứ Tư, ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Suy ra $P(B \mid \overline{A}) = 0,4$.

  Vậy:

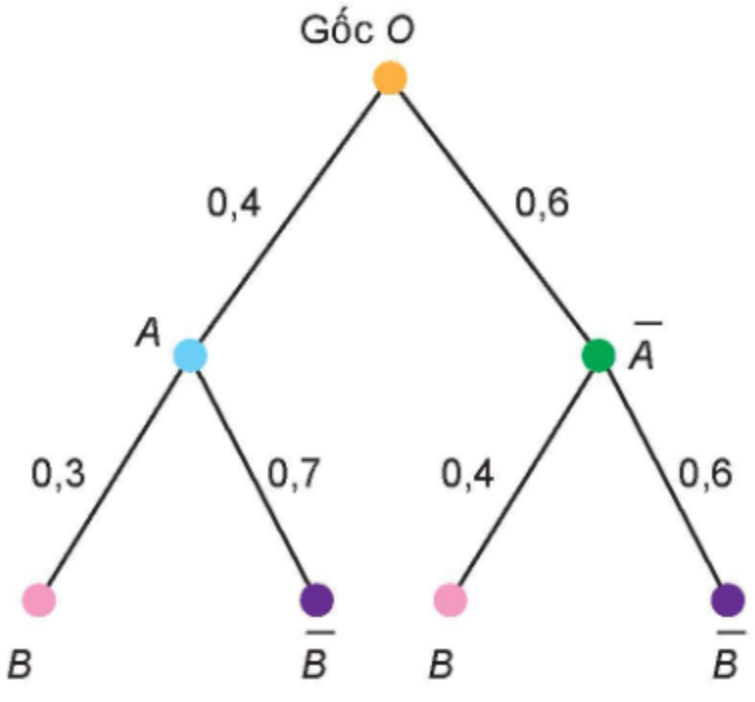
$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,36.$$

Luyện tập 1. Trở lại *tình huống mở đầu Mục 1*. Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Chú ý. Một phương pháp mô tả trực quan công thức xác suất toàn phần là dùng sơ đồ hình cây.

Trở lại Ví dụ 1. Kí hiệu A là biến cố: "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy"; B là biến cố: "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy".

Ta vẽ sơ đồ hình cây như sau:



Hình 6.2. Sơ đồ hình cây mô tả xác suất của biến cố

Trên nhánh cây OA và $O\overline{A}$ tương ứng ghi $P(A)$ và $P\left(\overline{A}\right)$;

Trên nhánh cây AB và $A\overline{B}$ tương ứng ghi $P(B \mid A)$ và $P\left(\overline{B} \mid A\right)$;

Trên nhánh cây $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$ tương ứng ghi $P(B \mid \overline{A})$ và $P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)$.

Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và $O\overline{A}B$. Vậy:

$$P(B) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,36.$$

Luyện tập 2. Trở lại Ví dụ 1. Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe buýt.

Vận dụng. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b.

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Tính xác suất để cây con có kiểu gene bb.

Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố: "Cây bố có kiểu gene bb";

M là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây bố";

N là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây mẹ";

E là biến cố: "Cây con có kiểu gene bb".

Theo giả thiết, M và N độc lập nên $P(E) = P(M) \cdot P(N)$.

Tính $P(M)$: Ta áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$P(M) = P(A) \cdot P(M \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(M \mid \overline{A}). \quad (*)$$

Ta có $P(A) = 0,4$; $P\left(\overline{A}\right) = 0,6$.

$P(M \mid A)$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb. Do đó $P(M \mid A) = 1$.

$P(M \mid \overline{A})$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb. Do đó $P(M \mid \overline{A}) = \frac{1}{2}$.

Thay vào (*) ta được: $P(M) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

Tương tự tính được $P(N) = 0,7$.

Vậy $P(E) = P(M) \cdot P(N) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$.

Từ kết quả trên suy ra trong một quần thể các cây đậu Hà Lan, mà ở đó tỉ lệ cây bố và cây mẹ mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%, thì tỉ lệ cây con có kiểu gene bb là khoảng 49%.

Luyện tập 3. Với giả thiết như vận dụng trên.

a) Hãy ước lượng tỉ lệ cây con có kiểu gene BB.

b) Sử dụng kết quả của vận dụng trên và câu a, hãy ước lượng tỉ lệ cây con có kiểu gene Bb.

sách-giáo-khoa.com

2. CÔNG THỨC BAYES



Trong Y học, để chẩn đoán bệnh X nào đó, người ta thường dùng một xét nghiệm. Xét nghiệm dương tính, tức là xét nghiệm đó kết luận một người mắc bệnh X. Xét nghiệm âm tính, tức là xét nghiệm đó kết luận một người không mắc bệnh X. Vì không có một xét nghiệm nào tuyệt đối đúng nên trên thực tế có thể xảy ra hai sai lầm sau:

– Xét nghiệm dương tính nhưng thực tế người xét nghiệm không mắc bệnh. Ta gọi đây là dương tính giả.

– Xét nghiệm âm tính nhưng thực tế người xét nghiệm lại mắc bệnh. Ta gọi đây là âm tính giả.

Ông M đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo X. Biết rằng, nếu một người mắc bệnh X thì với xác suất 0,95 xét nghiệm cho dương tính; nếu một người không bị bệnh X thì với xác suất 0,01 xét nghiệm cho dương tính.

Xét nghiệm của ông M cho kết quả dương tính. Ông M hoảng hốt khi nghĩ rằng mình có xác suất 0,95 mắc bệnh hiểm nghèo X. Mục 2 giúp chúng ta hiểu đúng xác suất đó.

HĐ2. Phân biệt $P(A \mid B)$ và $P(B \mid A)$

Trong *tình huống mở đầu Mục 2,* gọi A là biến cố: "Ông M mắc bệnh hiểm nghèo X"; B là biến cố: "Xét nghiệm cho kết quả dương tính".

a) Nêu các nội dung còn thiếu tương ứng với "(?)" để hoàn thành các câu sau đây:

- $P(A \mid B)$ là xác suất để (?) với điều kiện (?);
- $P(B \mid A)$ là xác suất để (?) với điều kiện (?).

b) 0,95 là $P(A \mid B)$ hay $P(B \mid A)$? Có phải ông M có xác suất 0,95 mắc bệnh hiểm nghèo X không?

Công thức sau đây cho ta tính $P(A \mid B)$ khi biết $P(B \mid A)$ và $P(A)$.

Cho A và B là hai biến cố, với $P(B) > 0$.

Khi đó, ta có công thức sau:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}.$$

Công thức trên có tên là công thức Bayes.

Công thức Bayes đóng vai trò quan trọng trong Lí thuyết Xác suất.



Thomas Bayes
(1701 – 1761)

Chú ý. Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}).$$

Do đó, công thức Bayes còn có thể viết dưới dạng:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}.$$

Ý nghĩa của công thức Bayes: Một nhà nghiên cứu quan tâm đến xác suất xảy ra của biến cố A. Theo tính toán ban đầu A có xác suất là $P(A) = p$. Sau đó, nhà nghiên cứu có được thông tin rằng: "Biến cố B đã xảy ra". Với thông tin mới này, nhà nghiên cứu sẽ cập nhật hiểu biết của mình về khả năng xảy ra biến cố A, bằng cách tính $P(A \mid B)$, xác suất của A khi biết B đã xảy ra. Công thức Bayes giúp ta tính $P(A \mid B)$.

Ví dụ 2. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Giải

Gọi A là biến cố: "Học sinh đó chọn tổ hợp A00"; B là biến cố: "Học sinh đó đỗ đại học".

Ta cần tính $P(A \mid B)$. Theo công thức Bayes, ta cần biết: $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P(B \mid A)$ và $P\left(B \mid \overline{A}\right)$.

Ta có: $P(A) = 0,8$; $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right) = 1 - 0,8 = 0,2$.

$P(B \mid A)$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó chọn tổ hợp A00 $\Rightarrow P\left(B \mid A\right) = 0,6$.

$P\left(B \mid \overline{A}\right)$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó không chọn tổ hợp A00 $\Rightarrow P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0,7$.

Thay vào công thức Bayes ta được:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(A\right) \cdot P\left(B \mid A\right)}{P\left(A\right) \cdot P\left(B \mid A\right) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(B \mid \overline{A}\right)} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7} \approx 0,7742.$$

Luyện tập 4. Trong một kho rượu có 30% là rượu loại I. Chọn ngẫu nhiên một chai rượu đưa cho ông Tùng, một người sành rượu, để nếm thử. Biết rằng, một chai rượu loại I có xác suất 0,9 để ông Tùng xác nhận là loại I; một chai rượu không phải loại I có xác suất 0,95 để ông Tùng xác nhận đây không phải là loại I. Sau khi nếm, ông Tùng xác nhận đây là rượu loại I. Tính xác suất để chai rượu đúng là rượu loại I.

Ví dụ 3. Trở lại *tình huống mở đầu Mục 2*. Tính xác suất để ông M mắc bệnh hiểm nghèo X nếu xét nghiệm cho kết quả dương tính.

Giải

Gọi A là biến cố: "Ông M mắc bệnh hiểm nghèo X"; B là biến cố: "Xét nghiệm cho kết quả dương tính".

Ta cần tính $P(A \mid B)$.

Theo công thức Bayes để tính $P(A \mid B)$, ta cần biết: $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P(B \mid A)$ và $P\left(B \mid \overline{A}\right)$.

Gọi p là tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo X.

Khi đó $P(A) = p$. Suy ra $P\left(\overline{A}\right) = 1 - p$.

$P(B \mid A)$ là xác suất để ông M có xét nghiệm là dương tính nếu ông M mắc bệnh hiểm nghèo X $\Rightarrow P\left(B \mid A\right) = 0,95$.

$P\left(B \mid \overline{A}\right)$ là xác suất để ông M có xét nghiệm là dương tính nếu ông M không mắc bệnh hiểm nghèo X $\Rightarrow P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0,01$.

Thay vào công thức Bayes ta có:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(A\right) \cdot P\left(B \mid A\right)}{P\left(A\right) \cdot P\left(B \mid A\right) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(B \mid \overline{A}\right)} = \frac{p \cdot 0,95}{p \cdot 0,95 + (1 - p) \cdot 0,01}.$$

Luyện tập 5. Trở lại *tình huống mở đầu Mục 2*. Thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo X là 0,2%.

a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là bao nhiêu?

b) Sau khi xét nghiệm cho kết quả dương tính, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là bao nhiêu?

Ví dụ 4. Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả là âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm là dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính.

a) Trước khi tiến hành xét nghiệm xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

b) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

Giải

Gọi A là biến cố: "Bà N bị bệnh hiểm nghèo Y"; B là biến cố: "Xét nghiệm cho kết quả dương tính".

a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

b) Ta cần tính $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

Theo công thức Bayes ta có

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})}{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) + P(A) \cdot P(\overline{B} \mid A)}.$$

$P(\overline{B} \mid \overline{A})$ là xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N không bị bệnh Y.

Theo bài ra ta có:

$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0{,}97$;

$P(\overline{B} \mid A)$ là xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y;

$P(\overline{B} \mid A) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$.

Thay vào công thức Bayes ta có

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{0{,}995 \cdot 0{,}97}{0{,}995 \cdot 0{,}97 + 0{,}005 \cdot 0{,}06} \approx 0{,}9997.$$

Như vậy, với xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh Y của bà N tăng lên thành 99,97% (trước xét nghiệm là 99,5%).

BÀI TẬP

6.7. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.

Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa.

sach-giao-khoa.com

Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên.

6.8. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng.

6.9. Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử, tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường.

a) Tính xác suất để linh kiện điện tử đó được đóng dấu OTK.

b) Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

6.10. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;

b) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

6.11. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

b) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.

c) Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

sách-giáo-khoa.com

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu từ 6.12 đến 6.14:

Cho $P(A)=\frac{2}{5}$; $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$; $P\left(B\mid \overline{A}\right)=\frac{1}{4}$.

6.12. Giá trị của $P(AB)$ là

A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{3}{16}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{4}{15}$.

6.13. Giá trị của $P\left(B\overline{A}\right)$ là

A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{4}{19}$. C. $\frac{4}{21}$. D. $\frac{3}{20}$.

6.14. Giá trị của $P(B)$ là

A. $\frac{19}{60}$. B. $\frac{17}{60}$. C. $\frac{9}{20}$. D. $\frac{7}{30}$.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu từ 6.15 đến 6.17:

Bạn An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô cô la đen, còn lại 4 chiếc kẹo sô cô la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình.

6.15. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô cô la đen là

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{3}{7}$.

6.16. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô cô la trắng là

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{4}{17}$.

6.17. Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô cô la đen ở lần thứ nhất, chiếc kẹo sô cô la trắng ở lần thứ hai là

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{16}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{4}{17}$.

B – TỰ LUẬN

6.18. Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh mất ngủ của hai loại thuốc X và Y, người ta tiến hành thử nghiệm trên 4 000 người bệnh tình nguyện. Kết quả được cho trong bảng thống kê 2 × 2 sau:

Dùng thuốc / Kết quả	X	Y
Khỏi bệnh	1 600	1 200
Không khỏi bệnh	800	400

Chọn ngẫu nhiên 1 người bệnh tham gia tình nguyện thử nghiệm thuốc.

a) Tính xác suất để người đó khỏi bệnh nếu biết người bệnh đó uống thuốc X.

b) Tính xác suất để người bệnh đó uống thuốc Y, biết rằng người đó khỏi bệnh.

6.19. Một nhóm có 25 học sinh, trong đó có 14 em học khá môn Toán, 16 em học khá môn Vật lí, 1 em không học khá cả hai môn Toán và Vật lí. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số đó. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Học khá môn Toán, đồng thời học khá môn Vật lí;

b) Học khá môn Toán, nhưng không học khá môn Vật lí;

c) Học khá môn Toán, biết rằng học sinh đó học khá môn Vật lí.

6.20. Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Trong một trò chơi, người chơi bắt một con gà trong số đó theo cách sau: "Người chơi tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì người chơi chọn chuồng I. Nếu số chấm không chia hết cho 3 thì người chơi chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn người chơi bắt ngẫu nhiên một con gà". Tính xác suất để người chơi bắt được con gà mái.

6.21. Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm; người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine và người này có phản ứng phụ. Tính xác suất để người này có bệnh nền, biết rằng tỉ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 18%.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

TÍNH NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH THANG

MỤC TIÊU

Thực hành tính nguyên hàm và tính gần đúng tích phân với phần mềm GeoGebra. Tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân cho dạng bảng (tại một số mốc) hoặc cho bởi một đồ thị (mà ta không biết phương trình của nó) hoặc không có nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp.

1. TÍNH NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

Khởi động phần mềm GeoGebra  ., chọn Complex Adaptive System (CAS) để thực hiện tính toán nguyên hàm và tích phân.

a) Tính nguyên hàm của hàm số

Để tính nguyên hàm của hàm số, ta dùng lệnh IntegralSymbolic(<hàm số>), kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.

1	IntegralSymbolic(sin(2 x)) → $\frac{-1}{2}\cos(2x) + c_1$
2	IntegralSymbolic$\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)$ → $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}^2\, x + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x}\, x + c_2$
2	IntegralSymbolic$\left(x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right)$ → $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)^2 + c_2$
2	IntegralSymbolic(x sin(2x + 1)) → $\frac{1}{4}\sin(2x+1) - \frac{1}{2}\, x\, \cos(2x+1) + c_2$

Hình T1

sách-giáo-khoa.com

b) Tính tích phân

Để tính gần đúng tích phân, ta dùng lệnh NIntegral (<hàm số, giá trị đầu, giá trị cuối>), kết quả sẽ được hiển thị ngay bên dưới.



Hình T2

Chú ý. Nếu muốn sử dụng giao diện tiếng Việt, sau khi khởi động GeoGebra, chọn Options → Language → Vietnamese/Tiếng Việt. Khi đó, thay vì cú pháp lệnh tiếng Anh như trình bày ở trên, ta dùng cú pháp lệnh tiếng Việt tương ứng như trong bảng sau:

Lệnh	Cú pháp lệnh tiếng Anh	Cú pháp lệnh tiếng Việt
Tính nguyên hàm	IntegralSymbolic(<*hàm số*>)	TíchPhân(<*hàm số*>)
Tính tích phân	NIntegral(<*hàm số, giá trị đầu, giá trị cuối*>)	TíchPhânXácĐịnh(<*hàm số, giá trị đầu, giá trị cuối*>)

Thực hành 1. Sử dụng phần mềm GeoGebra, tính:

a) $\int \frac{x^2-2x+2}{x+1}\mathrm{d}x$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \mathrm{d}x$.

sach-giao-khoa.com

2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH THANG

Để tính tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng định nghĩa, ta cần biết một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Tuy nhiên, nếu hàm số $f(x)$ không có nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp, chẳng hạn, người ta biết rằng

$$\int e^{x^2}\mathrm{d}x; \int e^{-x^2}\mathrm{d}x; \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x; \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x; \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x; \int \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x; \ldots$$

không phải là những hàm số sơ cấp, thì không thể dùng định nghĩa trên được. Tình huống tương tự xuất hiện khi $f(x)$ cho bởi một đồ thị mà ta không biết phương trình của nó. Khi đó, ta cần tính xấp xỉ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bằng các phương pháp số.

Phương pháp đơn giản nhất là ***phương pháp hình thang***, có nội dung như sau:

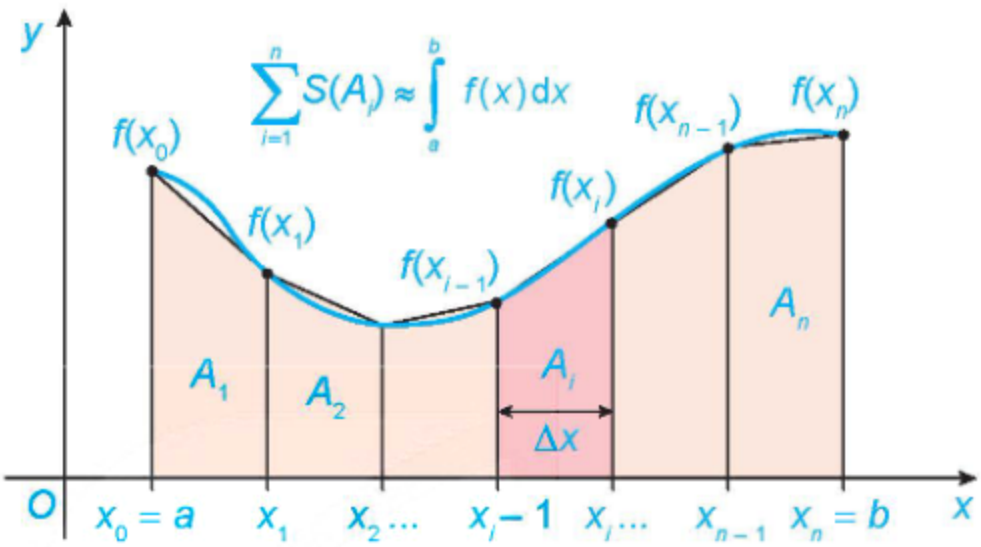
Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right],$$

ở đó đoạn $[a; b]$ được chia thành n đoạn con $[x_0;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, …, $[x_{n-1};\ x_n]$, mỗi đoạn có độ dài là $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Khi $f(x)$ là hàm liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, ta có:

Ý nghĩa hình học: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ xấp xỉ với tổng diện tích của các hình thang con A_1, A_2, …, A_n (H.T3).



Hình T3

Đánh giá sai số: Người ta chứng minh được rằng nếu $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì sai số $|E|$ của phương pháp hình thang được đánh giá như sau:

$$|E| \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}, \text{ trong đó } M = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|.$$

Thuật toán: Để tính xấp xỉ $\int_a^b f(x)\,dx$ với độ chính xác không vượt quá số ε cho trước, ta thực hiện lần lượt các bước sau:

Bước 1. Tính $f''(x)$ và tìm $M = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|$

(hoặc đánh giá $\max_{x\in[a;b]} |f''(x)| \le M$, nếu việc tìm chính xác là khó).

Bước 2. Với sai số ε cho trước, tìm số tự nhiên n (nhỏ nhất) sao cho

$$|E| \le \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} < \varepsilon.$$

Bước 3. Chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn con có độ dài bằng nhau và áp dụng công thức hình thang.

Ví dụ. Tính gần đúng $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ với độ chính xác nhỏ hơn 0,01.

Giải

a) Ta có: $f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f''(x) = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}$; $f'''(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$;

$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ta có: $f''(0) = -2$; $f''\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{4}{e\sqrt{e}}$; $f''(1) = \dfrac{2}{e}$.

Do đó $M = \max_{x\in[0;1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2$.

b) Ta cần tìm n sao cho

$$\frac{(1-0)^3 \cdot 2}{12n^2} < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{6n^2} < 0,01 \Leftrightarrow n > 4.$$

Do đó, ta chọn $n = 5$.

c) Chia đoạn [0; 1] thành 5 đoạn có độ dài bằng nhau là [0; 0,2], [0,2; 0,4], [0,4; 0,6], [0,6; 0,8], [0,8; 1].

Áp dụng công thức phương pháp hình thang, ta có:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1-0}{10}\left[\frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^{0,04}} + \frac{2}{e^{0,16}} + \frac{2}{e^{0,36}} + \frac{2}{e^{0,64}} + \frac{1}{e}\right] \approx 0,744.$$

Thực hành 2. Sử dụng phương pháp hình thang, tính gần đúng $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ với độ chính xác 0,01.

Vận dụng. Một thân cây dài 4,8 m được cắt thành các khúc gỗ dài 60 cm. Người ta đo đường kính của mỗi mặt cắt ngang và diện tích S của nó được ghi lại trong bảng dưới đây, ở đây x (cm) là khoảng cách tính từ đỉnh thân cây đến vết cắt.

x (cm)	0	60	120	180	240	300	360	420	480
S (cm^2)	240	248	256	260	264	272	298	316	320

Tìm thể tích gần đúng của thân cây này.

Hướng dẫn.

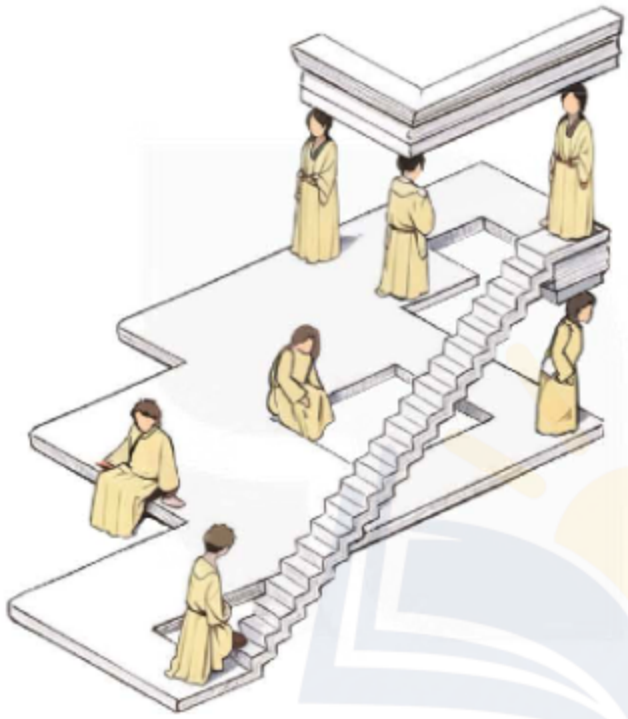
Thể tích cần tính là $V = \int_0^{480} S(x) dx$, trong đó $S(x)$ là diện tích mặt cắt ngang tại vị trí cách đỉnh thân cây một khoảng x (cm). Sử dụng phương pháp hình thang để tính gần đúng tích phân này.

sach-giao-khoa.com

VẼ ĐỒ HOẠ 3D VỚI PHẦN MỀM GEOGEBRA

AutoCAD và GeoGebra là các phần mềm hỗ trợ vẽ hình 2D, 3D trên máy tính. AutoCAD được sử dụng nhiều trong vẽ thiết kế kiến trúc, kĩ thuật, GeoGebra được dùng nhiều trong giáo dục. Nền tảng toán học cho các phần mềm này là hình học trong mặt phẳng toạ độ (hình 2D) và hình học trong không gian toạ độ (hình 3D). Em hãy trải nghiệm với việc dùng phần mềm GeoGebra cho một số thiết kế 3D.

1. VẼ TAM GIÁC PENROSE



Cầu thang bất khả



Tam giác Penrose

sach-giao-khoa.com

Tranh "Cầu thang bất khả" cho ta cảm giác rằng có mô hình cầu thang mà từng bước đưa ta lên cao, nhưng cuối cùng thì ta vẫn ở sàn nằm ngang đồng mức nơi xuất phát, đó là một điều không thể.

Hình ảnh "Tam giác Penrose" thể hiện một mô hình trong không gian mà có thể nhìn nó như được ghép từ ba hình hộp chữ nhật cùng kích thước (ứng với ba cạnh) đôi một vuông góc với nhau. Đó cũng là một mô hình không thể thực hiện được trong thực tế.

Nếu tìm trên mạng Internet từ khoá "impossible models", ta có thể bắt gặp nhiều hình ảnh cho các mô hình mà cũng như Cầu thang bất khả và Tam giác Penrose, chúng khả dĩ, hợp lí ở từng bộ phận, phạm vi hẹp, nhưng tổng thể thì không.

Cấu trúc Cầu thang bất khả (Impossible Straircase) là sáng tạo nghệ thuật của hoạ sĩ Thuỵ Điển Oscar Reutersvard từ nửa đầu thế kỉ XX. Sau này, nhà Vật lí – Toán học lớn Sir Roger Penrose cũng đưa ra ý tưởng này mà điển hình là "Tam giác Penrose" để nói lên nguyên lí bất khả trong nhận thức cái toàn bộ, rằng nhận thức, mặc dù mỗi ngày một tiến hoá, nhưng không bao giờ đạt đến chỗ biết hết, biết đầy đủ, biết tận cùng. (Theo F. David Peat (2002), *From Certainty to Uncertainty: The Story of Science and Ideas in the Twentieth Century*, Joseph Henry Press)

Trong hoạt động trải nghiệm này, em hãy theo hướng dẫn sau, để vẽ tam giác Penrose bằng cách dựng các hình hộp chữ nhật và lựa chọn một góc nhìn thích hợp.

Chú ý. Sử dụng giao diện GeoGebra bằng tiếng Việt: Vào mục *Thiết lập*, chọn *Ngôn ngữ*, chọn *Tiếng Việt*. Các hướng dẫn được đưa ra trong bài học này ứng với phiên bản GeoGebra Classic.

– *Bước 1.* Mở phần mềm GeoGebra, vào mục Hiển thị và lần lượt lựa chọn các mục sau:

Hiển thị danh sách đối tượng, Vùng làm việc, Hiển thị dạng 3D, Khung nhập lệnh.

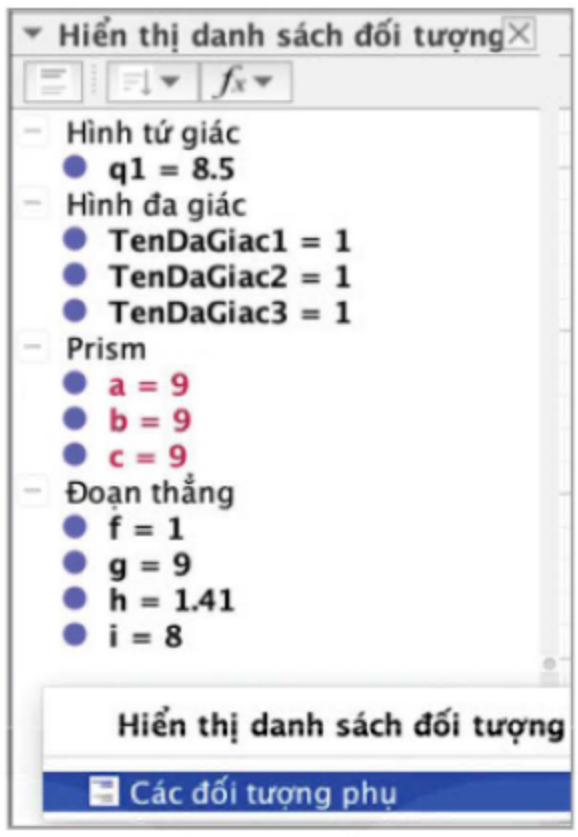


– *Bước 2.* Trong Khung nhập lệnh, lần lượt sử dụng các đoạn lệnh sau:

Đoạn lệnh	Ý nghĩa
DaGiac((0, 0, 0), (–1, 0, 0), 4, TrucTung)	Hình vuông có toạ độ 2 đỉnh là (0; 0; 0), (–1; 0; 0) và nằm trong mặt phẳng (*Oxz*).
DaGiac((0, 9, 0), (0, 10, 0), 4, TrucZ)	Hình vuông có toạ độ 2 đỉnh là (0; 9; 0), (0; 10; 0) và nằm trong mặt phẳng (*Oxy*).
DaGiac((–1, 0, 0), (–1, 1, 0), 4, TrucHoanh)	Hình vuông có toạ độ 2 đỉnh là (–1; 0; 0), (–1; 1; 0) và nằm trong mặt phẳng (*Oyz*).
HìnhLăngTrụ(TenDaGiac1, 9)	Hình lăng trụ có đáy là TenDagiac1 và chiều cao bằng 9 nằm ở phần dương của trục *Oy*.
HìnhLăngTrụ(TenDaGiac2, 9)	Hình lăng trụ có đáy là TenDagiac2 và chiều cao bằng 9 nằm ở phần dương của trục *Oz*.
HìnhLăngTrụ(TenDaGiac3, –9)	Hình lăng trụ có đáy là TenDagiac3 và chiều cao bằng 9 nằm ở phần âm của trục *Ox*.
DaGiac((0, 9, 0), (0, 10, 0), (0, 10, 9), (0, 9, 8))	Đa giác có toạ độ 4 đỉnh là (0; 9; 0), (0; 10; 0), (0; 10; 9), (0; 9; 8).

sách-giáo-khoa.com

– *Bước 3.* Di chuyển con trỏ vào khoảng trắng trong khung Hiển thị danh sách đối tượng, sau đó nháy chuột phải, lựa chọn mục Các đối tượng phụ.



– *Bước 4.* Di chuyển con trỏ vào mục Hình đa giác trong khung Hiển thị danh sách đối tượng, sau đó nháy chuột phải và lựa chọn mục Hiển thị đối tượng để ẩn 3 hình vuông đã dựng.

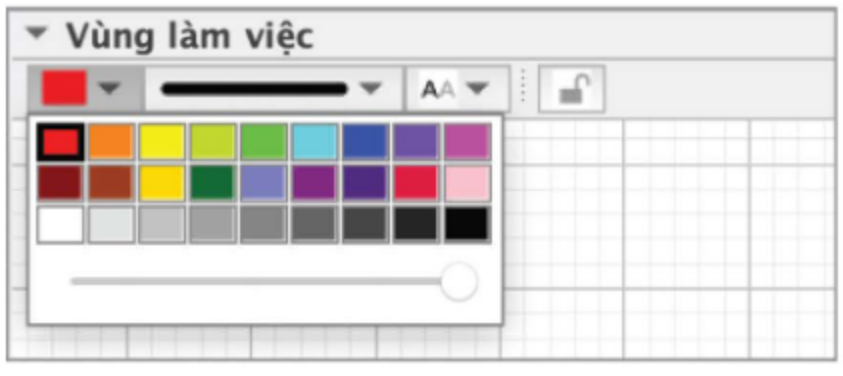


Làm tương tự Bước 4 cho đối tượng Đoạn thẳng và đối tượng Hình tứ giác để ẩn tất cả các đoạn thẳng và tứ giác.

– *Bước 5.* Trong khung Hiển thị danh sách đối tượng, di chuyển con trỏ đến ô tròn màu trắng của mục Mat4, sau đó nháy chuột để hiển thị Mat4.

Tiếp tục nháy chuột chọn Mat4, di chuyển con trỏ đến biểu tượng Thiết lập màu và sự trong suốt để tô màu cho tứ giác (ở đây ta tô màu đỏ và kéo thanh trượt để ở độ đậm lớn nhất).





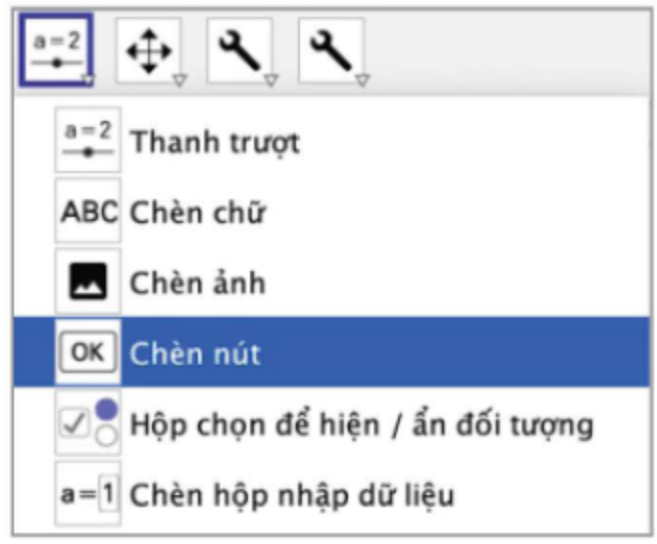
Làm tương tự Bước 5 cho các đối tượng:

Mat12 (ở đây ta tô màu đỏ);

Mat7, Mat11 (ở đây ta tô hai mặt này màu xanh da trời);

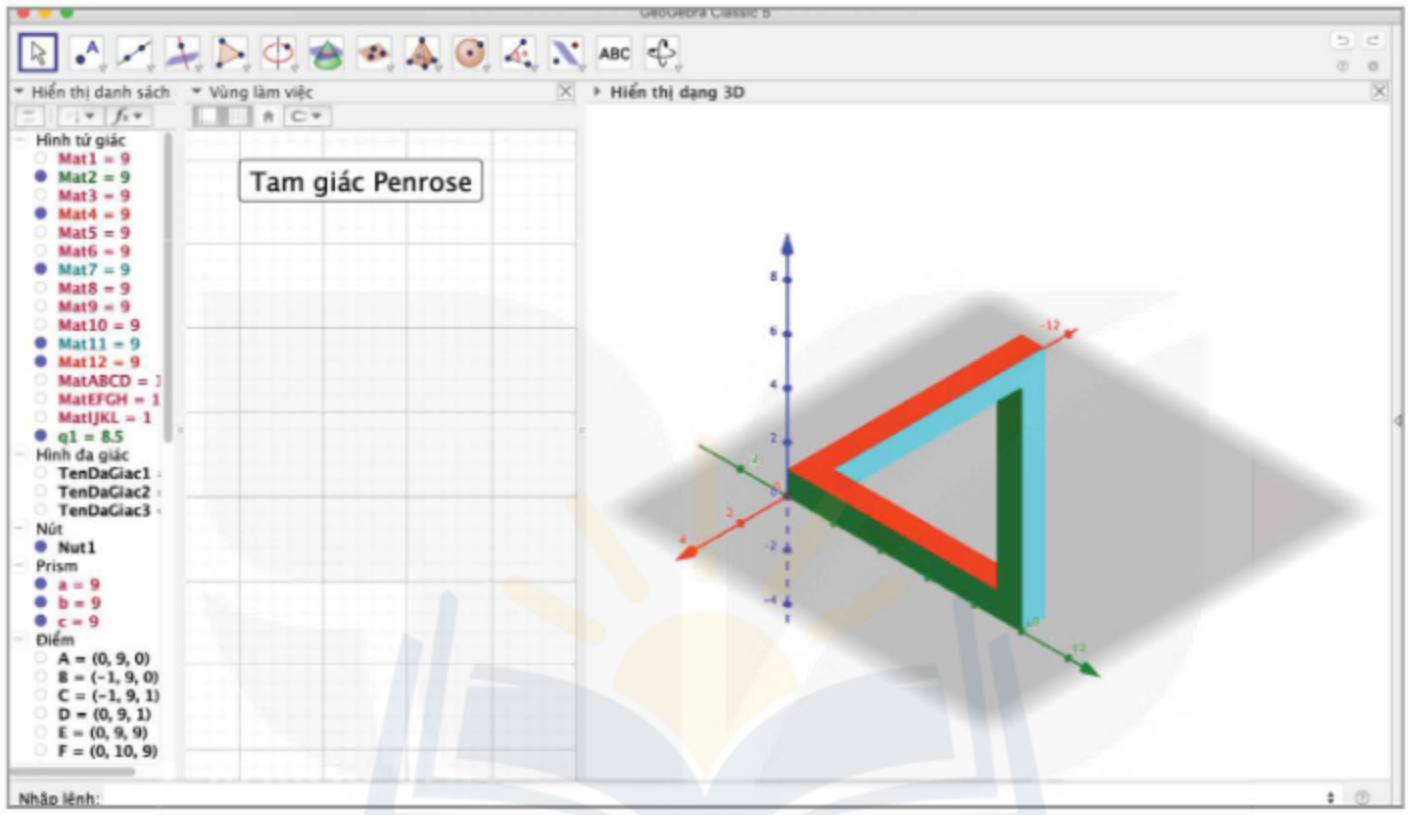
Mat2, q1 (ở đây ta tô hai mặt này màu xanh lá cây).

– *Bước 6.* Di chuyển con trỏ vào khoảng trắng trong khung Vùng làm việc, chọn công cụ  để chèn nút tạo góc nhìn thích hợp.



Sau đó nháy chuột vào khoảng trắng trong khung Vùng làm việc, cửa sổ mới được bật ra, điền tên tiêu đề, chẳng hạn "TamgiacPenrose" và GeoGebra Scrip, chẳng hạn "setview diretion [(–1, –1, –1)]".

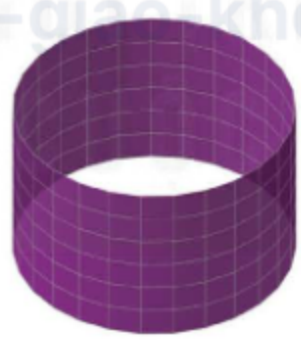
Sau khi tạo nút xong, nháy chuột vào nút Tam giác Penrose vừa tạo sẽ thu được hình vẽ sau.



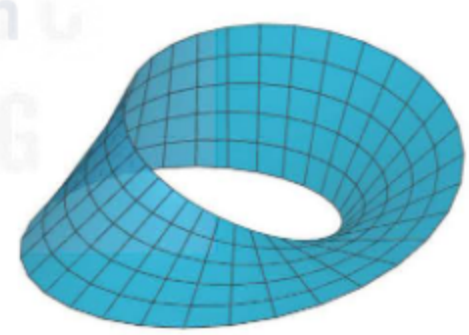
2. VẼ MẶT MOBIUS



Mặt cầu



Mặt trụ



Mặt Mobius

Từ một mảnh giấy hình chữ nhật *ABCD*, nếu dán hai mép *AB* và *DC* trùng nhau mà điểm *A* trùng điểm *D*, điểm *B* trùng điểm *C* thì ta được một hình có dạng mặt trụ, nhưng nếu dán hai mép *AB* và *CD* trùng nhau mà điểm *A* trùng điểm *C*, điểm *B* trùng điểm *D* thì ta sẽ được một hình có dạng gọi là mặt Mobius. Đối với mỗi mô hình có dạng mặt cầu, mặt trụ (hay nhiều mặt khác), ta có thể hình dung rõ rằng mỗi chúng có hai phía: trong và ngoài. Nhưng mô hình có dạng mặt Mobius không phân thành hai phía trong, ngoài như vậy.

Giả sử mảnh giấy hình chữ nhật nói trên có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Mặt trụ được tạo từ mảnh giấy đó có hai phía ứng với hai màu. Giả sử một con kiến đang bám ở phía này của mặt trụ, nếu không được phép leo qua mép mặt trụ, thì nó không thể bò sang phía còn lại của mặt trụ. Trong khi đó, đối với mặt Mobius tạo từ mảnh giấy đó, con kiến có thể

sach-giao-khoa.com

bò từ một vị trí ở phần giấy được tô màu đỏ sang bất kì vị trí nào ở phần giấy được tô màu xanh mà không cần leo qua mép của mặt Mobius.

Trong không gian toạ độ *Oxyz*, tập những điểm có toạ độ $(x;y;z)$ được xác định bởi

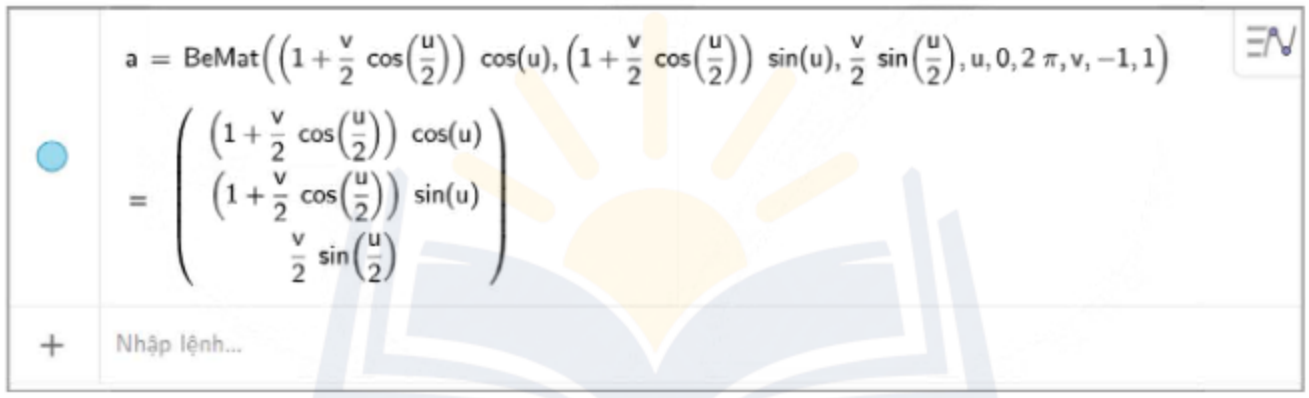
$$\begin{cases} x = \left(1+\frac{v}{2}\cdot\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cdot\cos(u) \\ y = \left(1+\frac{v}{2}\cdot\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cdot sin(u) \\ z = \frac{v}{2}\cdot\sin\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases}$$

(với u, v là các tham số thay đổi, thoả mãn $0 \le u < 2\pi$ và $-1 \le v \le 1$), là một mặt Mobius.

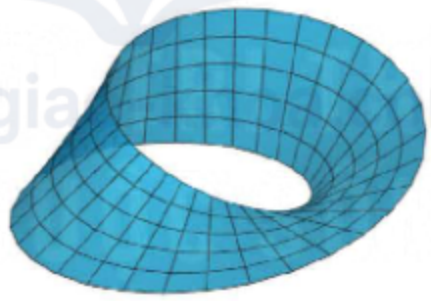
Ta có thể sử dụng phần mềm GeoGebra để vẽ mặt Mobius trên theo các bước sau:

– *Bước 1.* Mở phần mềm GeoGebra, vào mục Phối cảnh\Vẽ đồ hoạ 3D, chọn hiển thị hệ trục toạ độ, Show Plane.

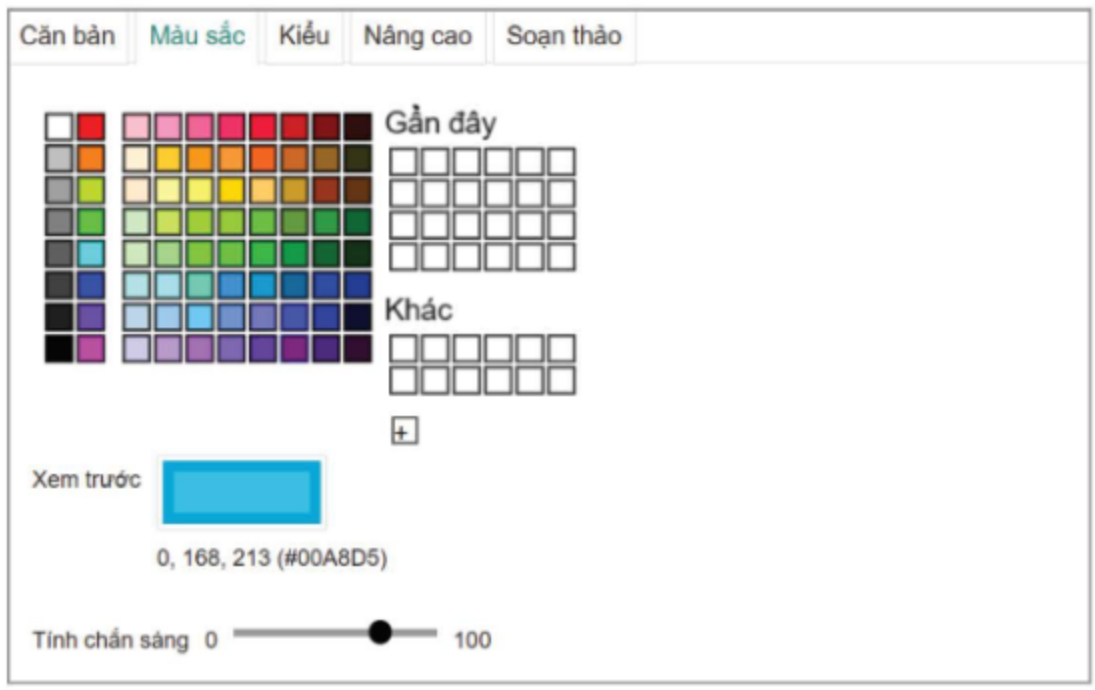
– *Bước 2.* Trong ô Nhập lệnh, nhập phương trình của mặt Mobius như sau:



Trên màn hình hiển thị hình vẽ:



– *Bước 3.* Để đổi màu cho hình vẽ, chọn mặt cần đổi màu trong ô Nhập lệnh, nháy chuột phải và chọn Thiết lập. Trong mục Thiết lập, chọn mục Màu sắc:



BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A – TRẮC NGHIỆM

1. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ là

A. $(-\infty; 1)$. B. $(3; +\infty)$.

C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

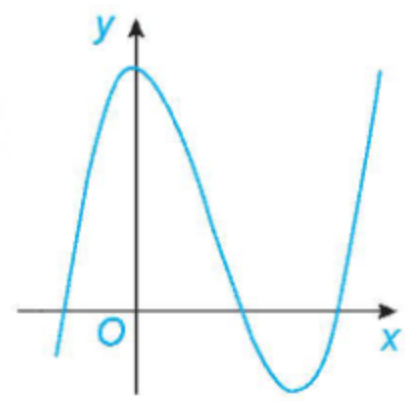
2. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. $M = 6$. B. $M = 7$. C. $M = \dfrac{19}{3}$. D. $M = \dfrac{20}{3}$.

3. Tổng số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

C. $y = -x^2 + 2x + 1$. D. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

5. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\,dx = 2x + C$. B. $\int f(x)\,dx = x^2 + 3x + C$.

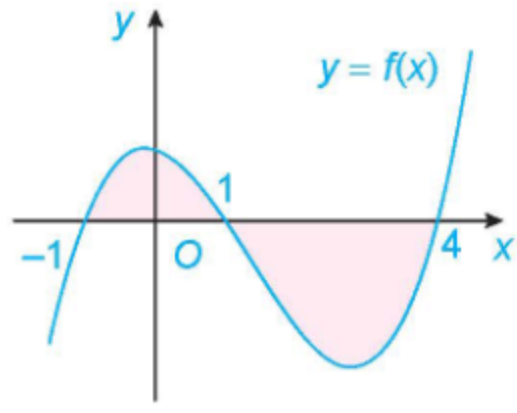
C. $\int f(x)\,dx = x^3 + 3x + C$. D. $\int f(x)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + 3x + C$.

6. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(0) = 1$ và $f'(x) = 2\sin x + 1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2 + 12\pi - 16}{8}$. B. $\dfrac{\pi^2 - 4\pi + 16}{8}$.

C. $\dfrac{\pi^2 + 6\pi - 8}{4}$. D. $\dfrac{\pi^2 - 2\pi + 8}{4}$.

7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ như hình bên.



sách-giáo-khoa.com

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{4} f(x)\,dx$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{4} f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{4} f(x)\,dx$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{4} f(x)\,dx$.

8. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là

A. $V=32$.

B. $V=32\pi$.

C. $V=\frac{32}{3}$.

D. $V=\frac{32\pi}{3}$.

9. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và M là trung điểm của đoạn thẳng AG. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

A. $\overrightarrow{MG}$.

B. $2\overrightarrow{MG}$.

C. $3\overrightarrow{MG}$.

D. $4\overrightarrow{MG}$.

10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và gọi G là trọng tâm của tam giác BDA'. Tỉ số $\frac{AG}{AO}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=3\\z=-1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z+1=0$. Côsin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $3x-6y+2z+6=0$.

B. $3x-6y+2z-6=0$.

C. $3x-2y+2z-1=0$.

D. $3x-6y+2z-1=0$.

13. Thống kê thời gian trong tuần dành cho đọc sách của một số nhân viên trong một công ty được cho trong bảng sau:

Thời gian (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số nhân viên	3	8	15	7	2

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. 13.

B. 10.

C. 8.

D. 6.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này là (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

A. 1,99.

B. 2,02.

C. 3,97.

D. 4,09.

14. Trong một nhóm 25 người, có 15 người thích uống trà, 17 người thích uống cà phê, 9 người thích uống cả cà phê và trà. Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm. Biết rằng người đó thích uống cà phê. Xác suất để người đó thích uống trà là

A. $\frac{9}{17}$. B. $\frac{8}{17}$. C. $\frac{9}{19}$. D. $\frac{10}{19}$.

15. Trong số 40 học sinh lớp 12A, có 22 em đăng kí thi ngành Kinh tế, 25 em đăng kí thi ngành Luật, 3 em không đăng kí thi cả hai ngành này. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, biết rằng em đó đăng kí thi ngành Luật. Xác suất để em đó đăng kí thi ngành Kinh tế là

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{4}{7}$.

B – TỰ LUẬN

16. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2$; b) $y = \frac{2x+1}{x+2}$; c) $y = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$.

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$; b) $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.

18. Khi đạp phanh thì một ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc có độ lớn 10 m/s^2.

a) Nếu khi bắt đầu đạp phanh ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì sau bao lâu kể từ khi đạp phanh, ô tô sẽ dừng lại?

b) Nếu ô tô dừng lại trong vòng 20 m sau khi đạp phanh thì vận tốc lớn nhất của ô tô ngay trước lúc đạp phanh (tính bằng km/h) có thể là bao nhiêu?

19. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2$ và $f(1) = 2$.

20. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^2 \left|x^2 - x\right| dx$; b) $I = \int_0^1 (2x-1)^3 dx$;

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3\sin x - \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$; d) $I = \int_1^2 \left(2e^x - \frac{1}{x}\right) dx$.

21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = x^2 - 1,\ y = x + 5,\ x = -2,\ x = 3.$$

22. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x, y = 0, x = 0$ và $x = 2$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox.

23. Cho tứ diện $ABCD$, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$;

b) Nếu $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ thì $AD \perp BC$.

24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $BC'D'$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

b) Tính theo a độ dài đoạn thẳng AG.

25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 5 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 1; 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

a) Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A và song song với đường thẳng d.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d.

27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(3; 0; -1)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (OAB).

b) Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

28. Trong không gian $Oxyz$, có một nguồn sáng phát ra từ điểm $S(2; 3; 5)$ và một đoạn dây thẳng nối từ điểm $A(1; 2; 1)$ đến điểm $B(3; 1; 2)$. Dưới nguồn sáng, đoạn dây trên có bóng trên mặt phẳng (xOy) là một đoạn thẳng. Tính độ dài đoạn thẳng đó.

29. Thu nhập của người lao động trong một công ty được cho trong bảng sau:

Mức thu nhập (triệu đồng)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
Số người	2	60	90	50	1

Tính khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

30. Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 8 con gà trống và 13 con gà mái. Chuồng II có 10 con gà trống và 6 con gà mái. An bắt ngẫu nhiên một con gà từ chuồng II đem thả vào chuồng I. Sau đó, Bình bắt ngẫu nhiên một con gà từ chuồng I.

Giả sử Bình bắt được con gà mái. Tính xác suất để Bình bắt được con gà mái của chuồng I.

31. Trong một tuần, Sơn chọn ngẫu nhiên ba ngày chạy bộ buổi sáng. Nếu chạy bộ thì xác suất Sơn ăn thêm một quả trứng vào bữa sáng hôm đó là 0,7. Nếu không chạy bộ thì xác suất Sơn ăn thêm một quả trứng vào bữa sáng hôm đó là 0,25. Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần của Sơn. Tính xác suất để hôm đó Sơn chạy bộ nếu biết rằng bữa sáng hôm đó Sơn có ăn thêm một quả trứng.

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

B Bán kính (của mặt cầu) 54

Bảng nguyên hàm 10

Bảng dữ liệu thống kê 2 × 2 66

Biểu thức dưới dấu tích phân 14

C Cặp vectơ chỉ phương (của mặt phẳng) 31

Cận dưới (của tích phân) 14

Cận trên (của tích phân) 14

Công thức Bayes 75

Công thức nhân xác suất 68

Công thức xác suất toàn phần 72

D Dấu tích phân 14

Diện tích của hình phẳng 19

G Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 51

Góc giữa hai đường thẳng 50

Góc giữa hai mặt phẳng 51

H Hàm số dưới dấu tích phân 14

Hình thang cong 12

K Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 38

Khối tròn xoay 24

M Mặt cầu 54

N Nguyên hàm 5

P Phương pháp hình thang 83

Phương trình chính tắc của đường thẳng 43

Phương trình tham số của đường thẳng 42

Phương trình mặt cầu 54

Phương trình tổng quát của mặt phẳng 33

T Tâm (của mặt cầu) 54

Thể tích của vật thể 22

Thể tích khối tròn xoay 24

Tích có hướng của hai vectơ 30

Tích phân 14

Tính gần đúng tích phân 82

V Vectơ chỉ phương của đường thẳng 41

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng 30

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng 46

X Xác suất có điều kiện 64

sách-giao-khoa.com

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH
Bảng nguyên hàm	Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp
Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng	Hai vectơ khác vectơ-không, không cùng phương với nhau và có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng
Cận tích phân	Trong tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, a gọi là cận dưới, b gọi là cận trên của tích phân
Công thức Bayes	Công thức cho phép cập nhật xác suất xảy ra của biến cố A khi biết một sự kiện liên quan B đã xảy ra
Hàm số dưới dấu tích phân	Trong tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $f(x)$ gọi là hàm số dưới dấu tích phân
Hình thang cong	Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$
Nguyên hàm	Nguyên hàm của một hàm số trên một khoảng là hàm số có đạo hàm bằng hàm số đã cho trên khoảng đó
Phương trình chính tắc của đường thẳng	Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$ với a, b, c đều khác 0 là $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$
Phương trình mặt cầu	Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R là $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
Phương trình tham số của đường thẳng	Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$ là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$
Phương trình tổng quát của mặt phẳng	Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0
Tích phân	Tích phân từ a đến b của hàm số liên tục $f(x)$, kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, là hiệu số $F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$
Vectơ chỉ phương của đường thẳng	Vectơ khác vectơ-không và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng	Vectơ khác vectơ-không và có giá vuông góc với mặt phẳng
Xác suất có điều kiện	Xác suất của một biến cố A nào đó, biết rằng một biến cố B khác xảy ra

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên – Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập lần đầu: LƯU THẾ SƠN – VŨ THỊ VÂN
Biên tập tái bản: HOÀNG THỊ THANH
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: NGUYỄN ĐÌNH HƯƠNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: NGUYỄN DUY LONG – PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

Bản quyền © (2024) thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Xuất bản phẩm đã đăng kí quyền tác giả. Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

TOÁN 12 - TẬP HAI
Mã số: G1HHZT005h26
In ... bản, (QĐ .....) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Địa chỉ: ...
Số ĐKXB: 7-2026/CXBIPH/205-09/GD
Số QĐXB: ..... ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu Quý ... năm .....
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-39273-2
Tập hai: 978-604-0-39274-9



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 12, tập một
2. Ngữ văn 12, tập hai
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12
4. Toán 12, tập một
5. Toán 12, tập hai
6. Chuyên đề học tập Toán 12
7. Lịch sử 12
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 12
9. Địa lí 12
10. Chuyên đề học tập Địa lí 12
11. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
12. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
13. Vật lí 12
14. Chuyên đề học tập Vật lí 12
15. Hoá học 12
16. Chuyên đề học tập Hoá học 12
17. Sinh học 12
18. Chuyên đề học tập Sinh học 12
19. Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử
21. Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản
23. Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
24. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
26. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
27. Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
28. Mĩ thuật 12 – Thiết kế đồ hoạ
29. Mĩ thuật 12 – Thiết kế thời trang
30. Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
31. Mĩ thuật 12 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
32. Mĩ thuật 12 – Điêu khắc
33. Mĩ thuật 12 – Kiến trúc
34. Mĩ thuật 12 – Hội hoạ
35. Mĩ thuật 12 – Đồ hoạ (tranh in)
36. Mĩ thuật 12 – Thiết kế công nghiệp
37. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12
38. Âm nhạc 12
39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12
40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12
41. Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền
42. Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá
43. Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông
44. Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ
45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12
46. Tiếng Anh 12 – Global Success – Sách học sinh

Website: https://www.nxbgd.vn

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

ISBN 978-604-0-39274-9

9 786040 392749

Giá: 11.700 đ